MATEMATIKO TRANSLIMEN

revuo de **Internacia Asocio de Esperantistaj Matematikistoj (IAdEM)**

decembro **1977**

n-ro **3 + 4** ~~= 7~~

Redaktis, tajpis, enpaĝigis, ... :
François Le Jacomo, 14 rue de la Pompe, F - 75016 Paris, Francio.

duobla numero ...

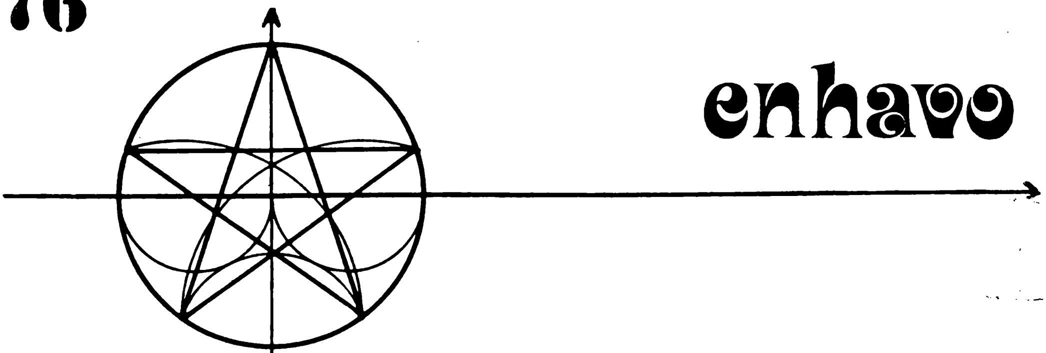
ffeelliiĉĉaann nnoovvjjaarroonn !!......

duobla numero ...

76 paĝoj
500 ekzempleroj

nekredeble !

500 ekzempleroj
76 paĝoj



enhavo

kio nova pri IAdEM ? 2

cerbumaĵoj 3

la prefikso mal– en matematika terminologio 15

geometria terminologio 17

Aŝvinikumar — enkonduko en intuiciismon 30

François Lo Jacomo — 6174 : ĉu finsolvita problemo ? 33

Gerard Cool — probabloj pri entjeraj kaj naturaj nombroj 36

François Lo Jacomo — la nombroj de Bernouilli 45

Valerij Bokov — al konstruado de maĵoranto por solvo de kelkaj eliptikaj diferencialaj ekvacioj 67

William Orr — la teoremo pri kvar koloroj (enkonduko al la sekvanta artikolo) 70

Kenneth Appel kaj Wolfgang Haken — ĉiu ebena mapo estas kvarkolorebla (tradukita el la angla fare de William Orr) 73

enhavo ↑ ĉi supre ↑

Dum unu jaro depost la apero de la lasta numero de "Matematiko Translimen", regule kaj kontentige pleniĝis la kaso de IAdEM, kaj ĉiaŭre prokrastiĝis la revuo. Kaj subite aperas revuo kaj malpleniĝas la kaso. Normale du numeroj de la revuo devus aperi ĉiujare, sed por kompensi tiun mankon, mi eldonis duoblan, ampleksan numeron : 76 paĝoj, ĉu ne mirinde ?

Malgraŭ la prokrastiĝo de la revuo, la asocio IAdEM ne estis dormanta dum 1977. Ekde Februaro 1977 okazis ampleksa varbkampanjo, dissendado de informfolioj al centoj da adresoj, kaj aliĝo de pluraj dekoj da novaj membroj. Pluraj bultenoj, Esperantistaj kaj ne-Esperantistaj, aperigis informojn pri IAdEM. Samtempe, dank'al efika kotiz-alvoko, la enspezoj de IAdEM pli-ol-duobl-iĝis. En Aprilo 1977 aperis la unua jarlibro de IAdEM kun 71 adresoj kaj informoj pri la profesioj de la membroj, iliaj matematikaj interesoj, ktp... Samtempe la komitato de UEA aprobis kontrakton pri kunlaboro inter UEA kaj IAdEM, kiu efektiviĝos ekde 1978. Dank'al kunlaboro inter IAdEM kaj FEoLL en Paderborn (FR Germanujo), progresas la Esperantigo de la plurlingva matematika terminaro de Meschkowski.

Dum la jarkunveno en Rejkjavik, oni aludis la plej gravan problemon de IAdEM nuntempe : la plej-multon de la taskoj plenumas unu sola homo, kaj ne eblas plenumi tiom da taskoj kontentige kaj ĝustatempe. En Septembro 1977 mi verkis cirkuleron por informi la membrojn pri la nuna situacio, interalie pri la neceso trovi novan redaktoron por "Matematiko Translimen", tiel ke ĝi aperu pli regule, kaj por veki reagojn kaj voĉdonigi pri diversaj aferoj. Poste mi verkis diversajn lingvistikajn disertaĵojn, plenumis diversajn taskojn en UEA, JEFO (franca E-junularo), ktp... vojaĝis diverslanden, tamen mi forte strebis al aperigo de tiu-ĉi numero de "Matematiko Translimen", la lasta antaŭ ol mi fordonu la redaktoran oficon.

Jen ĝi. Ĉar montriĝis, en la ĵus aludita voĉdonado, ke la membroj de IAdEM ŝatas cerbumi pri distraj matematikaj problemoj, mi kolektis en la unuaj paĝoj ĉi-poste dekojn da tiaj problemoj, kiuj cerbumigos vin almenaŭ ĝis la apero de la venonta numero de la revuo. Ili ja estas malfacilaj, postulas multe da sagaceco kaj strebado, sed ne nepre multe da scikonoj pri matematikaj teoremoj. Vidu ekzemple la numerojn 16 kaj 19. Ankaŭ la numerojn 1 kaj 2 povas almenaŭ ekataki ĉiu homo ; nur gimnaziaj konoj utilas por 3, 4, 6 (krom lasta demando), 9, 25, 28 kaj 30, apenaŭ pli por 5, 8, 12, 13, 17, 18, 26, 27, 29 ; instruistoj kaj universitataj studentoj povos krome solvi la 7, 10, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 33, sed ja restas kelkaj iom pli postulemaj : 11, 31, 32. Ĉiuj solveblas, krom eventuale la lasta demando de 6.

Ni tamen ne forgesu la ceteron de la agado de IAdEM : abiturajn kaj olimpiadajn taskojn vi trovos tuj post la distraj problemoj, kaj tuj poste 15 paĝojn koncerne nian terminologian agadon. Poste, kiel promesite, mi dediĉis pli ol duonon de tiu-ĉi revuo al matematikaj artikoloj, diverstemaj kaj diversnivelaj.

Nun la plej urĝaj taskoj de IAdEM estas : replenigi la kason por povi plu eldoni la revuon kaj alian materialon. La ĵusa enketado montris, ke IAdEM povas kalkuli je la malavareco de siaj membroj. Mi krome kalkulas je la glata disvendado de tiu-ĉi revuo : ĉar ofsete ne multe kostas la nombro da ekzempleroj, mi ofsetigis je 500 ekzempleroj. Necesas do revigligi la varbkampanjon kaj trovi multajn propagandemajn perantojn. Ĉu ni kapablos eldoni ĉi-jare la broŝureton de Gerard Cool kun 128 distraj problemoj ? Ni krome devas plivigligi la agadon : ekzemple, kiel provizi al tiuj, kiuj longe, strebe sed vane, klopodis solvi iujn el la ĉi-apudaj cerbumaĵoj, redaktitajn solvojn de la koncernaj problemetoj ? Ankaŭ la terminologia agado bezonas pli efikan kunordigadon. Pri tiu agado kaj pri administraj informoj aperos cirkuleroj ; la revuo havos novan redaktoron, fiksitan nombron da paĝoj kaj entenos ĉefe matematikajn artikolojn, kaj nur resume informojn pri IAdEM kaj ties agado, elektitajn problemetojn, ... Ĝi estos kompostita de profesiuloj. IAdEM ankaŭ devos zorgi pri sia regularo, prepari la kunvenojn en Varna, ktp...

Pri ĉio-ĉi mi kalkulas je via efika kunlaborado, kaj antaŭe dankas, nome de IAdEM.

La sekretario : François Lo Jacomo

cerbumaĵoj

1 familia adicio

En la ĉi-apuda adicio, ĉiu litero anstataŭas ciferon (la sama litero ĉiam anstataŭas la saman ciferon, kaj malsamaj literoj nepre anstataŭas malsamajn ciferojn), kaj la adicio, kompreneble, estas ĝusta.

	P A T R O
+	P A T R I N O
+	F I L O
+	F I L I N O
=	F A M I L I O

Bonvolu re-ciferigi ĝin.

2 Trovu kvar naturajn nombrojn tri-ciferajn, kun sama unua cifero, kies sumo estu dividebla de tri el ili.

★ kiu problemo havas kiel solvon 6174 ? ➞ p. 33 ★

3 Dum sporta konkurso, kiu daŭris n tagojn, m premioj estis disdonitaj. La unuan tagon, oni disdonis unu premion plus 1/7 de la $(m-1)$ restantaj premioj. La duan tagon oni disdonis du premiojn plus 1/7 de la nova restaĵo, ktp. tiel, ke la n-an tagon oni disdonis ekzakte la n restantajn premiojn.

Kalkulu la nombrojn m kaj n.

4 Tri ludantoj A, B, C, ludas per tri kartoj. Sur ĉiu karto estas skribita entjera nombro. Tiuj tri nombroj, p, q, r, verigas : $0 < p < q < r$. Oni donas karton al ĉiu ludanto, kaj ĉiu ricevas nombron da moneroj egalan je la nombro skribita sur lia karto. Oni reprenas la kartojn, miksas ilin kaj redonas, laŭ sama regulo. Post nombro $N \geqslant 2$ da disdonadoj, la ludantoj A, B kaj C havas respektive entute 20, 10 kaj 9 monerojn.

Ĉu eblas diri, kiu ludanto ricevis q monerojn ĉe la unua disdonado, sciante, ke B ricevis r monerojn ĉe la lasta disdonado ?

5 Por iuj ajn naturaj nombroj m kaj n, montru, ke : $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

6 ne-komuteblaj entjeroj

En la aro Z de la (racionalaj) entjeroj, oni difinu la operacion $*$ per :

$$a * b = \begin{cases} a + b & \text{se a estas para} \quad (a = 2n) \\ a - b & \text{se a estas ne-para} \quad (a = 2n+1) \end{cases}$$

Montru, ke kun tiu operacio Z estas grupo (ne-komutativa). Priskribu ties subgrupojn kaj kvocient-grupojn.

Ĉu eblas pluigi tiun operacion al la aro Q de la racionaloj, tio estas : difini en Q novan operacion $*$ tian, ke

$(Q, *)$ ja estu grupo kaj ĉe la entjeroj, ambaŭ operacioj koincidu ?

7 problemo de fibonacci

Mi konsideru vicon difinitan jene : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, kaj por ĉiu $n \geqslant 2$, $u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2}$, kie a kaj b estas ne-nulaj entjeroj.

Montru, ke : p divizoras q $\Rightarrow$ u_p divizoras u_q $(p \mid q \Rightarrow u_p \mid u_q)$

Sub kiuj kondiĉoj validas ankaŭ la reciproko ? $(u_p \mid u_q \Rightarrow p \mid q)$

Se p estas primnombro ne-divizoro de b, montru, ke p divizoras aŭ u_{p-1}, aŭ u_p, aŭ u_{p+1}.

Se b divizoras a (interalie se b = +1 aŭ b = −1), montru, ke por ĉiu entjero $n > 0$, ekzistas entjero $m > 0$ tia, ke n divizoras u_m.

8 Montru, ke ekzistas nefinio da naturaj nombroj skribeblaj kiel $2^n - 3$ (n entjero $\geqslant 2$), tiel ke du ajnaj el ili estu sen komunaj divizoroj.

★ laŭ kiu probablo du ajnaj entjeroj estas sen komunaj divizoroj ? ➡ p. 37 ★

9 Montru, ke ekzistas nefinio da naturaj nombroj a tiaj, ke por iu ajn entjero n, $n^4 + a$ ne estu primnombro.

10 Ĉu ekzistas funkcio φ, de N al N, injekcia (enĵeta, t.e. : $n \neq m \Rightarrow \varphi(n) \neq \varphi(m)$) kaj tia, ke la serio : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ estu konverĝa ?

11 malpermesita al intuiciistoj

Ĉu ekzistas vico de polinomoj $P_n(X)$ kun reelaj koeficientoj, tiel ke : $\forall z \in C$ $(z = x + iy)$,

$$\lim_{n \to \infty} P_n(z) = \begin{cases} \sin z & \text{se } z \in R \text{ (t.e. } y = 0), \\ 0 & \text{se } z \notin R \text{ (t.e. } y \neq 0). \end{cases}$$

★ intuiciistoj sin prezentas, dank'al Aŝvinikumar ! ➡ p. 30 ★

12 Estu P polinomo kun entjeraj koeficientoj kaj grado $d \geqslant 1$. Se ekzistas n malsamaj entjeroj k tiaj, ke $(P(k))^2 = 1$, montru, ke : $n - d \leqslant 2$.

13 Estu P(z) polinomo de kompleksa variablo, kun grado k, kaj estu b kaj c du malsamaj kompleksaj nombroj. Se la ekvacioj P(z) = b kaj P(z) = c havas respektive n kaj m malsamajn solvojn (senkonsidere je la multobleco de tiuj solvoj), montru, ke : $m + n > k$.

14 Se P(X) estas ajna polinomo kun reelaj aŭ kompleksaj koeficientoj, montru, ke $P(P(X)) - X$ estas nepre dividebla per $P(X) - X$.

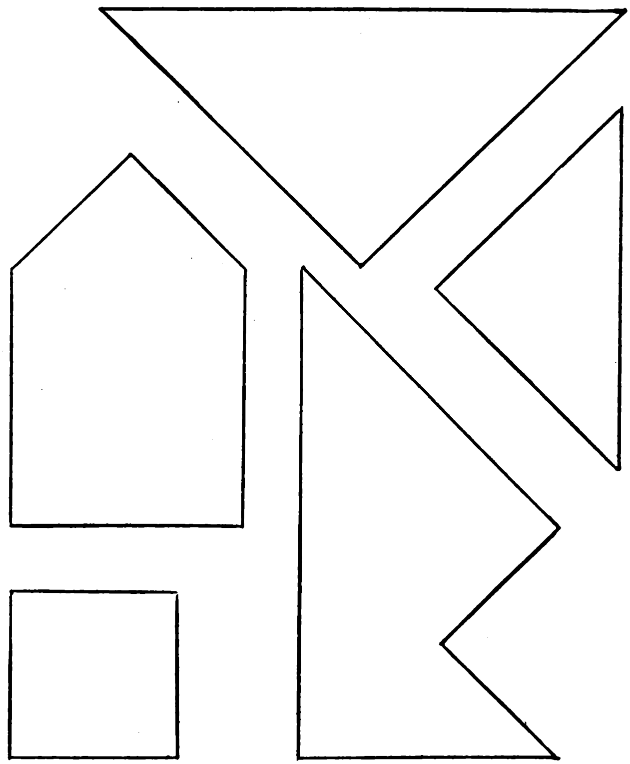
15 Estu P(z) polinomo de kompleksa variablo. Montru, ke la solvoj de $P'(z) = 0$ troviĝas en la konveksa envelopo de la solvoj de $P(z) = 0$ (t.e. : en la plej malgranda konveksa pluredro, kiu entenas la solvojn de $P(z) = 0$. pluredro = surfaco + lateroj + verticoj).

★ ne konservu viajn solvojn por vi ! sendu ilin al Gerard COOL, CH - 6082 Wasserwendi, Svislando ★

16 ➜

rekonstruu

la kvadraton...



Ĝin mi dispecigis en kvin figurojn, kiujn mi dismetis ĉi-apude en ĥaosa ordo.

Ĉu vi kapablas, per via nura menso, rekonstrui la kvadraton ?

(do imagi, kiel lokiĝas tiuj pecoj unu rilate la alian, sen kontroli per distranĉado de la ĉi-apuda desegno).

17 Por ĉiu entjero $n \geqslant 4$, montru, ke ĉiu kvarangulo ABCD encirkligebla (t.e. : tia, ke ekzistas cirklo(linio), kiu trapasas ĉiun verticon A, B, C, D), estas dispartigebla (dispecigebla) en n encirkligeblajn kvarangulojn.

18 Montru, ke eblas enmeti en kvadraton, kies latero egalas 3/2, nefinion da kvadratoj q_n, por n = 1, 2, ... tiaj, ke la latero de q_n egalu 1/n, kaj ke du kvadratoj q_n ne havu internan punkton komunan.

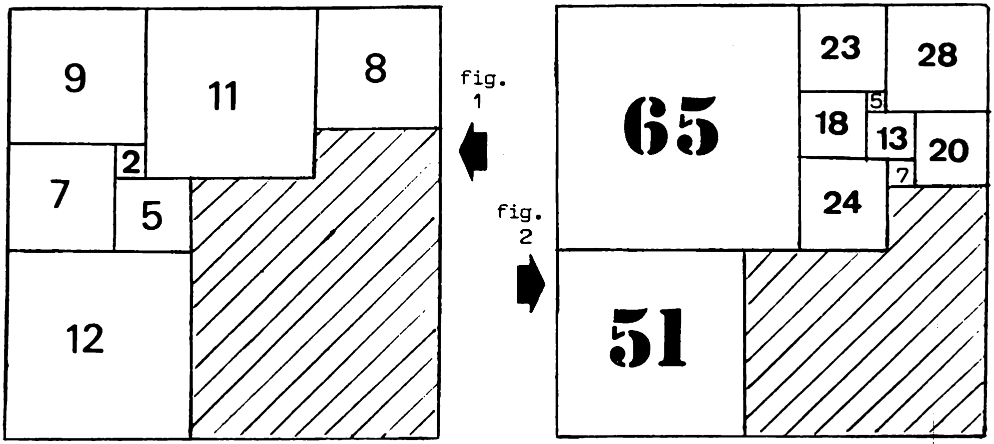
19 kvadratigo de la kvadrato

Kvadratigi cirklon, tio estas trovi kvadraton kun sama areo, kiel donita cirklo. Sed kvadratigi kvadraton, estas tute alia afero !

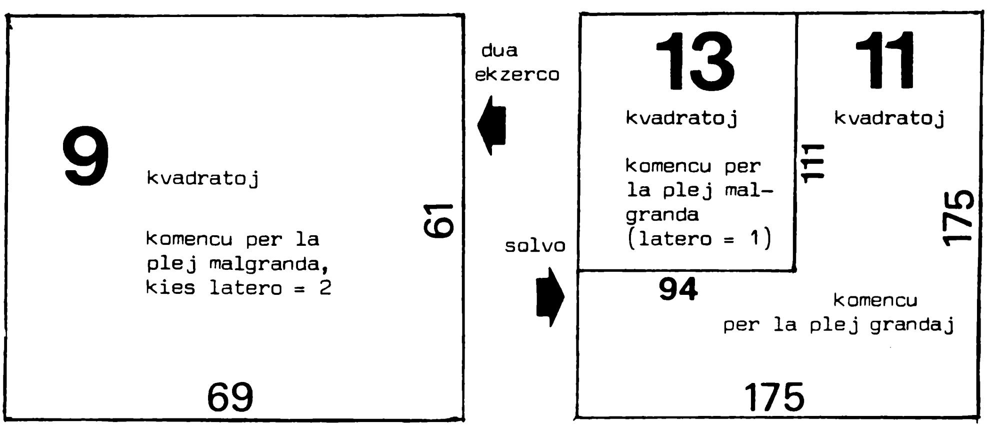
Temas pri disdivido de la kvadrato en aliajn kvadratojn, ĉiuj neegalaj (do du el tiuj kvadratoj nepre ne havu la saman grandecon).

Nu vi jam vidas, pri kio temas ; sed vi ankoraŭ ne scias, ĉu tiu problemo estas solvebla, nek kiel oni povas ataki ĝin. Mi estis en tiu sama situacio, kiam oni montris al mi unu solvon, nome : la kvadratigo de la kvadrato per 24 kvadratoj. Laŭdire tiun solvon oni trovis per komputoro. Mi ne donos al vi la solvon, por ke vi klopodu mem trovi ĝin, sed mi donos al vi kelkajn konsilojn, por ke vi povu efike ekataki la problemon.

La figuroj 1 kaj 2 prezentas du kvadratojn, kies lateroj mezuras respektive 28 kaj 116, kiujn mi komencis kvadratigi. La nombro skribita ene de ĉiu kvadrato estas la mezuro de ties latero. Bedaŭrinde, mia provo estas verŝajne fuŝa, mi dubas, ke tiel komencinte oni atingos kontentigan solvon. Tamen, mi konsilas al vi provi kompletigi tiun kvadratigon, laŭ la ĉi-supraj reguloj (du kvadratoj ne rajtas esti samgrandaj), unue por konvinkiĝi, ke ja tiu provo estas fuŝa, due por spertiĝi pri tia tekniko kaj kompreni la subtilecon de la problemo.



Poste venas dua ekzerco antaŭ la fina solvo. Plenigu rektangulon (ortogramon) kun larĝo 61 kaj longo 69 per 9 kvadratoj, komencante per la plej malgranda el ili, kies latero egalas 2. Kaj en la solvo, kiun mi konas, troviĝas ĉe iu angulo iu tia ortogramo, plenigebla per 13 kvadratoj, kaj la ceteron de la kvadrato vi povas plenigi per 11 kvadratoj. Ĉu vi nun kapablas trovi la solvon ?



20 patologia derivado

Ni konsideru la funkcion $g(x)$ difinitan sur $[0,1]$ per :

$$g(x) = \int_0^x e^{1/(t^2-t)}\,dt$$

Montru, ke $g(x)$ estas strikte kreskanta kaj senfine derivebla sur $[0,1]$, ke por ĉiu $x \in [0,1]$, $g(x)+g(1-x)=g(1)$, kaj por ĉiu $k \geqslant 1$, $\frac{d^kg}{dx^k}(0 \text{ aŭ } 1) = 0$, (ĉiuj sinsekvaj derivaĵoj ĉe 0 aŭ 1 estas nulaj).

Ekde nun, nur tiuj-ĉi ecoj de g utilos al ni. Ni skribos : $g(1) = a$, kies valoro absolute ne gravas (la figurojn vi desegnu kvazaŭ $a = 1$).

Ni konstruu la vicon de funkcioj f_n difinitaj sur $[0,1]$ per :

$$f_0(x) = g(x)$$

$$\forall n \geqslant 0, \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{se } x \in [0,\ 1/3] \\ a/2 & \text{se } x \in [1/3,\ 2/3] \\ a - \frac{1}{2} f_n(3-3x) & \text{se } x \in [2/3,\ 1] \end{cases}$$

Montru, ke f_n estas kreskanta kaj senfine derivebla sur $[0,1]$, kaj ke ĉiuj ĝiaj sinsekvaj derivaĵoj ĉe 0, 1/3, 2/3 kaj 1 estas nulaj.

Montru, ke la vico f_n uniforme konverĝas al kontinua funkcio f. En kiuj punktoj tiu-ĉi funkcio f estas derivebla, kaj kiom valoras ties derivaĵo ?

Interalie, ĉu f estas derivebla ĉe : 0, 1/3, 2/3, 1 ?

Nun, por ĉiu reelo $\theta > 2$, ni konstruu la vicon de funkcioj $f_{\theta,n}$ difinitaj sur $[0,1]$ per : $f_{\theta,0}(x) = g(x)$

$$\forall n \geqslant 0, \quad f_{\theta,n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{\theta,n}(\theta x) & \text{se } x \in \left[0,\ \frac{1}{\theta}\right] \\ a/2 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{\theta},\ 1-\frac{1}{\theta}\right] \\ a - \frac{1}{2} f_{\theta,n}(\theta - \theta x) & \text{se } x \in \left[1-\frac{1}{\theta},\ 1\right]. \end{cases}$$

Montru, ke tiuj funkcioj $f_{\theta,n}$ havas similajn ecojn kiel f_n (kreskantaj, senfine deriveblaj, derivaĵoj nulaj ĉe 0), kaj ke ili uniforme konverĝas al funkcio f_θ same patologia kiel f rilate derivadon.

Montru, ke kiam $\theta \to 2$, f_θ uniforme konverĝas al funkcio $h(x)$, strikte kreskanta kaj senfine derivebla sur $[0,1]$, kaj kalkulu eksplicite $h(x)$.

Montru, ke por iu ajn $n \in \mathbb{N}$, kiam $\theta \to 2$, $f_{\theta,n}(x)$ uniforme konverĝas al funkcio $g_n(x)$, strikte kreskanta kaj senfine derivebla sur $[0,1]$. Kalkulu $\frac{d^kg_n}{dx^k}(0)$ kaj $\frac{d^kg_n}{dx^k}(1)$ por k entjero $\geqslant 1$. Ĉu ankaŭ la derivaĵoj de $f_{\theta,n}$ uniforme konverĝas al la derivaĵoj de g_n ?

Montru, ke la vico $g_n(x)$ uniforme konverĝas al $h(x)$ kiam $n \to \infty$

Kompletigu la ĉi-apudan sagaron per demonstrado, ke por iu ajn vico θ_n de reeloj > 2, tia, ke $\theta_n \to 2$ kiam $n \to \infty$, la "diagonala" vico de funkcioj $h_n(x) = f_{\theta_n,n}(x)$ uniforme konverĝas al $h(x)$.

$$\begin{tikzcd} f_{\theta,n} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & g_n \arrow[d] \\ f_\theta \arrow[r] & h \end{tikzcd}$$

★ se vico de funkcioj f_n holomorfaj en Ω uniforme konverĝas al funkcio f, tiam f estas holomorfa, kaj la derivaĵoj de f_n uniforme konverĝas al la derivaĵoj de f. ⟶ p. 56 ★

21 polusa eksponencialo

Ni konsideru du vicojn u_n kaj u'_n de reeloj, difinitajn jene :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{kaj } \forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{2n+3}{2n+4}\, u_{n-1} + \frac{\frac{1}{2}n}{n^2-1}\, u_{n-2}$$

$$u'_0 = 0, \quad u'_1 = 1, \quad \text{kaj } \forall n \geqslant 2, \quad u'_n = \frac{n^2-3}{n^2+2n}\, u'_{n-1} + \frac{2n}{n^2-1}\, u'_{n-2}$$

Kalkulu eksplicite la limeson de u_n kaj la limeson de u'_n kiam n kreskas nefinien.

Helpe de tiu ekzerco, difinu per simila rikura rilato vicon $u_n(x)$ de racionalaj funkcioj, kiu konverĝu en la tuta ebeno, krom ĉe la polusoj, al la eksponenciala funkcio e^z. En kiaj regionoj tiu konverĝo estas uniforma ?

22 Kalkulu : $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ kiel funkcion de $\sin(2x)$. Deduktu de tio la sumon de la (senfina) serio : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\, tg^2\!\left(\frac{a}{2^n}\right)$ por iu ajn $a \in \,]0,\pi[$.

23 Demonstru, ke por iu ajn reelo x : $tg\, x + tg(x+\frac{\pi}{5}) + tg(x+\frac{2\pi}{5}) + tg(x+\frac{3\pi}{5}) + tg(x+\frac{4\pi}{5}) = 5 \,.\, tg\, x \,.\, tg(x+\frac{\pi}{5}) \,.\, tg(x+\frac{2\pi}{5}) \,.\, tg(x+\frac{3\pi}{5}) \,.\, tg(x+\frac{4\pi}{5})$.

24 Kalkulu : $\left|\dfrac{\sin x + \sin iy}{\sin(x+iy)}\right|$ (x kaj y reeloj. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$).

25 Trovu la aron de la valoroj, kiujn povas havi :
$S = \dfrac{a}{a+b+d} + \dfrac{b}{a+b+c} + \dfrac{c}{b+c+d} + \dfrac{d}{a+c+d}$ kiam a, b, c, d estas pozitivaj reeloj.

26 triangulaj probabloj

100 punktoj de ebeno estas tiaj, ke tri el ili neniam estas samrektaj. Montru, ke estas maksimume 70 % da trianguloj kun nur akutaj anguloj inter la trianguloj, kiujn oni povas konstrui per tiuj 100 punktoj.

★ ĉu eblas kunigi duope 5 punktojn per ne-intersekcantaj linioj ? ⟶ p. 70 ★

27 Ni konsideru n punktojn en ebeno ($n \geqslant 5$). Montru, ke ekzistas almenaŭ $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ konveksaj kvaredroj, kies verticoj estu prenataj inter la n punktoj. Ni supozu, ke neniuj tri punktoj estas samrektaj.

28 Montru, ke ekzistas unu nura triangulo, kies lateroj estas tri sinsekvaj naturaj nombroj, kaj tiaj, ke ekzistas unu angulo de la triangulo duobla je alia angulo de la triangulo.

29 Ni konsideru kvaredron, kies unu nura edro havas longon pli grandan ol 1. Montru, ke la volumeno de tia kvaredro estas maksimume 1/8.

30 truo en globo

Tra la centro de solida globo, oni boris cilindran truon kun ses coloj (aŭ metroj) da longeco. Kiom da volumeno havas nun la traborita globo ?

★ pri ĉio koncerne geometriajn kaj trigonometriajn terminojn, ➞ p. 17 ★

tedaj sed eblaj

31 Kalkulu : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\right)^n dt$ (n entjero $\geqslant 1$)

32 Montru, ke : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{4+n^4}$

★ diskreta konsilo : ĉu vi konas la Eùlerajn seriojn ? ➞ p. 55 ★

33 subtila metriko

En la aro C de la kompleksaj nombroj, mi difinu novan distancon (metrikon) : $d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } |x| \neq |y| \\ |x-y| & \text{se } |x| = |y| \end{cases}$

Montru, ke tio ja estas metriko. Mi nomu C* tiun novan metrikan spacon.

Priskribu ties apertajn bulojn, malapertajn (klozajn) bulojn, la apertojn kaj la klozojn ĝenerale, la kompaktojn kaj la koneksojn. Montru interalie :

ke tiu nova topologio estas pli fajna ol la kutima topologio de C (do enhavas pli da apertoj).

ke la kloza bulo kun centro 0 kaj radiuso 1 (= $\{x \mid d(x,0) \leq 1\}$) estas nek kompakta nek koneksa,

ke ĉiu konekso Ω estas koneksa per arkoj (do $\forall$ a,b en Ω, $\exists$ f kontinua funkcio de $[0,1] \to \Omega$ tia, ke f(0) = a, f(1) = b), kaj ke ekzistas nur kvin specoj de koneksoj (mi nomas samspecaj du koneksojn homeomorfajn), inter kiuj : du specoj de apertaj koneksoj kaj tri specoj de malapertaj (klozaj) koneksoj.

ke ekzistas apertaj kompaktoj krom $\emptyset$.

Ĉu tiu metrika spaco C* estas kompleta ?

Montru, ke C* estas reela variedo (t.e. : ĉiu punkto havas apudaĵon homeomorfan je R^n : france VARIETE, angle MANIFOLD). Kiu estas ties dimensio ?

★ trilingvan resumon havas la artikolo de Valerij Bokov, ➞ p. 67 ★

★

★ ĉiam valida : ĉiuspecajn distrajn problemojn bonvolu sendi al Gerard COOL, CH - 6082 Wasserwendi, Svislando ilin oni eble enmetos en la preparata broŝureto pri disp-aĵoj ★

★ dum vi distriĝas per solvado de tiuj amuzaj problemetoj, ĉu vi pensas al la diverslandaj lernantoj, kiuj peras pri siaj lernejaj taskoj ? ★

abituro en Rumanio

Radu Pătraşcu

enkonduko

La elementa lernejo havas kvar klasojn (ekde la aĝo de ses jaroj), la unuagrada kaj duagrada lernejoj havas po kvar klasojn, do entute estas 12 klasoj. Nuntempe, la unuaj dek klasoj estas devigaj kaj senpagaj, proksimestonte, ĉiuj dekdu klasoj estos tiaj.

La unuagrada kaj duagrada lernejoj estas de tri kategorioj : klasikaj, ekonomiaj kaj scienc-teknikaj, ĉiuj dispartigitaj en fakojn interne de ĉiu el inter ili.

Post la finstudo de 12 klasoj sekvas la abitur-ekzameno. Nur surbaze de sukceso ĉe abitur-ekzameno oni povas kandidatiĝi (ekzamene) al superaj lernejoj (universitato, instituto, politekniko). Lerninto, kiu ne daŭrigas la studojn ĉe supera lernejo, povas labori en institucio, entrepreno, fabriko, ktp., ĉar ĉiuspeca lernejo entenas teorian lernadon kaj paralele praktikan respondfakan lernadon senpere en la produktado. Se iu ne deziras labori en la fako, kiun li lernis, tiu povas specialiĝi en alia fako en postlernejaj kursoj en la kadro de institucioj, entreprenoj, fabrikoj, ktp.

La abiturekzameno okazas kolektive por ĉiuj lernejoj el iu teritorio, kun profesoroj el aliaj teritorioj. La abiturekzameno entenas skribekzamenon (por matematiko, la problemoj estas la samaj en la koncerna teritorio), kaj parolekzameno (la konkursanto tiras por si el sliparo problemslipon kun du aŭ tri problemoj). Iuloke ekzistas nur parolekzameno. En la urbo, la problemoj por abiturekzameno estas ricevitaj en fermitaj kovertoj senditaj de instruaŭtoritato.

La problemoj, kiujn mi prezentas ĉi-tie, estas nek la plej instruaj, nek la plej karakterizaj en la lando, mi celis ankaŭ apliki la lingvon en tiu fako.

La nekonvena karaktero de tia verko (problemoj) estas, ke la scienc-materio evoluas kaj post nelonge, parto de la enteno eksvalidiĝas. Evoluas ankaŭ la enteno de la instruprogramoj en la lernejoj.

algebro

Al.1 Kontrolu la identaĵon :

$$\frac{1}{(1+y/x)^3}+\frac{1}{(1+x/y)^3}+\frac{3}{(1+y/x)(1+x/y)^3}+\frac{3}{(1+x/y)(1+y/x)^3}+\frac{6}{(1+y/x)^2(1+x/y)^3}+\frac{6}{(1+x/y)^2(1+y/x)^3}=1$$

Al.2 Solvu la ekvacion : $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x-10}=0$

Al.3 Estu f funkcio de E al F, A kaj B partoj de E. Klarigu la jenajn rilatojn :

(i) : $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,

(ii) : $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$

(iii) : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(iv) : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Montru per kontraŭ-ekzemplo, ke (ii) kaj (iv) ĝenerale ne estas egalaĵoj. Determinu sufiĉan kondiĉon pri la funkcio f, por ke (ii) kaj (iv) estu egalaĵoj por ĉiuj A kaj B $\in \mathcal{P}(E)$. Ĉu ĉi-tiu kondiĉo estas ankaŭ necesa ?

Formu kaj demonstru la analogaĵojn de la rilatoj (i) ĝis (iv) por la malbildoj de partoj de F.

★ kio estas malbildo ? ➞ p. 15 ★

Al.4 Estu $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ tri funkcioj. Oni konsideru la kunmetitajn funkciojn : $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$. Montru, ke :

se du el tiuj kunmetitaj funkcioj estas injekciaj (enĵetaj) kaj la tria surjekcia (surĵeta), tiam f, g kaj h estas nepre bijekciaj.

se du el la kunmetitaj funkcioj estas surjekciaj (surĵetaj) kaj la tria injekcia (enĵeta), tiam f, g kaj h estas nepre bijekciaj.

Al.5 Estu la ringo A, kaj estu $K = \{k \in N \mid \forall x \in A,\ kx = 0\}$. Oni diras, ke A estas nul-karaktera (-karakteristika ?) se $K = \emptyset$; oni diras, ke A estas n-karaktera (-karakteristika) se $K \neq \emptyset$ kaj $\inf K = n$ (inf = suba baro, minimumo).

Montru ekzemplojn de nul-karakter(istik)aj kaj n-karakter(istik)aj ringoj.

Estu A integra ringo, a kaj b elementoj de $A^* = A - \{0\}$. Montru, ke se $k \in K \neq \emptyset$, tiam la egalaĵoj : $ka = 0$ kaj $kb = 0$ estas ekvivalentaj. Deduktu de ĉi-tio, ke, se A estas integra ringo, tiam ĝia karakter(istik)o estas ĉu nulo, ĉu primnombro (do A estas ĉu nul-karakter(istik)a, ĉu prim-karakter(istik)a).

Estu p primnombro, A estu p-karakter(istik)a ringo kaj a,b elementoj de A, tiaj, ke $ab = ba$. Montru, ke $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Al.6 Estu E_m kaj E_n finiaj aroj kun m (resp. n) elementoj. Se $s_{m,n}$, por $n \leq m$, montras la nombron da surjekcioj (surĵetoj) de E_m sur E_n, demonstru la egalaĵon : $n^m = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s_{m,n-k}$ kun : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Al.7 Ene de la ringo $\mathcal{M}_3(R)$ oni konsideras la matricon $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kalkulu J^2, J^3 kaj J^4.

Oni konsideras la aron : $\mathcal{M} = \{M(a,b) \in \mathcal{M}_3(R) \mid M(a,b) = I + aJ + bJ^2\}$. Montru, ke la multiplikado de matricoj estas kunmet-leĝo en $\mathcal{M}$, kaj ke koncerne ĉi-tiun leĝon, la aro $\mathcal{M}$ estas komutebla (komutativa) grupo.

analitiko

An.1 Estu la funkcio : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

Kalkulu $f'(x)$.

Trovu la ekstremajn punktojn de $f(x)$.

An.2 Trovu la grafikaĵon de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

An.3 Formu la diferencialan ekvacion de la familio de kurboj :

$y = m \cdot \ln x + n \cdot \mathrm{tg}\, x$ (m kaj n estas reelaj parametroj, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

mekaniko

M.1 Estu M la maso de raketo (sen hejtaĵo), kaj M_0 estu la maso M plus la maso de la hejtaĵo. c estas la rapideco de la gas-elfluo tra la ajuto kaj $v_0 = 0$ estas la komenc-rapideco de la raketo.

Sen konsideri la gravito-forton nek la reziston de la atmosfer-aero, trovu la rapidecon de la raketo post la forbrulado de la enhavata hejtaĵo.

M.2 En du vazoj, kies bazo-surfacoj estas S_1 kaj S_2, ekzistas likvaĵo, kies denseco estas ρ, plenigante la vazojn ĝis la altoj H_1 (resp. H_2) ($H_1 > H_2$), je la momento $t = 0$. La vazoj komunikas inter si per tubo.

Supozante, ke la maso de la likvaĵo pasanta de S_1 en S_2 dum sekundo estas proporcia al la diferenco de niveloj, bonvolu serĉi la ĉiumomentan alton de la likvaĵo en la vazo S_1.

probablo kalkulo

P.1 Estu la sendependaj variabloj : $X \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1/3 & p & q \end{pmatrix}$ kaj $Y \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3-q & p \end{pmatrix}$
Kalkulu la kvanton a, tiel ke la variablo $X-Y$ havu la dispersecon egalan je 4/9.

P.2 Iu laboristo zorgas pri n maŝinoj, ĉiuj de la sama tipo, situintaj rektlinie, je distanco a unu disde la najbara. Konsiderante, ke la laboristo zorgas pri la maŝinoj sinsekve irante por ripari la difektiĝintan masinon, kalkulu la mezvaloron de la vojo trairita de li por unu riparo.

nombra kalkulado

Nia kalkulmaŝino provizas al ni nur 4 ciferojn.

N.1 . Uzante la konatajn algoritmojn, kalkulu $y = \sum a_k b_k$, se :

1° $a_1 = 0,864531$ $a_2 = 1,3029$ $a_3 = \pi$ $a_4 = 4\pi/3$
$b_1 = \sqrt{2}$ $b_2 = 3.10^{-2}$ $b_3 = 10,385$ $b_4 = \log(\sin 1°\,50')$
alproksimigante per rondformado (do : al la plej proksima 4-cifera nombro),

2° $a_1 = \sqrt[3]{\pi}$ $a_2 = e$ $a_3 = 2/\pi$ $a_4 = 3$
$b_1 = \sin 15°$ $b_2 = 10,291$ $b_3 = \sqrt[3]{e}$ $b_4 = 1/e$
alproksimigante per kvadratformoj (do : al la tuj suba 4-cifera nombro).

N.2 Kalkulu la integralon : $I = \int_1^2 \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ uzante la formulon de la trapezoj por $n = 5$. Taksu la maksimuman absolutan eraron.

informadiko

(komputoro : IRIS - 50)

I.1 Kalkulu la valorojn de la funkcio :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{\cos x}{x^3} & \text{se } x \leq 1 \\[2ex] e^x + \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x + 2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
por la samdistancaj nodoj de la retaro, formiĝintaj en la intervalo $[-10, 20]$, kun la paŝo $h = 0,5$; la unua nodo estas -10.

I.2 Skribu programojn por kalkulado de $f(n) = n!$ en la situacio $n = 1, 2, \ldots 20$; laboru per INTEGER kaj respektive per REAL. Komparu la rezultojn.

olimpiado en Ĉeĥoslovakio — Jozef Kušnier

O.1 Determinu ĉiujn triopojn de entjeraj nombroj (x, y, z), por kiuj validas : $x^2 + y^2 = 3z^2$.

O.2 Pruvu, ke por ĉiu reela nombro $x \in [0, 1]$ validas : $\frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3} < \frac{1}{25}$;

O.3 En donita duonebeno limigita per rekto p ni konsideru punktojn M kaj N, je diversaj distancoj de la rekto p. Konstruu trapezon MNPO, kies verticoj P kaj O situu sur la rekto p kaj kies areo estu egala je la areo de la kvadrato kun latero MN.

O.4 Solvu la sistemon de linearaj ekvacioj :

$$\begin{array}{rcl}
x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n & = & 2a \\
-x_1 - 3x_2 - x_3 - \dots - x_n & = & 4a \\
-x_1 - x_2 - 7x_3 - \dots - x_n & = & 8a \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
-x_1 - x_2 - x_3 - \dots - (2^n - 1)x_n & = & 2^n a
\end{array}$$

kie $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ estas la nekonatoj, kaj a estas donita reela parametro.

O.5 "Se konveksa plurangulo kun perimetro o_1 troviĝas interne de alia konveksa plurangulo kun perimetro o_2, tiam $o_1 \leq o_2$"; bonvolu demonstri.

O.6 En spaco estas donitaj duonebenoj π kaj π' kun komuna limrekto p, tiel ke ili ne kuŝas en la sama ebeno. En duonebeno π estas lokigitaj punktoj A, B, C, D, kaj en duonebeno π', punktoj A', B', C', D', tiel, ke neniu el ili kuŝas sur la rekto p, ke la rektoj AA', BB', CC' kaj DD' estu paralelaj kaj krome, ke la punktoj A, B, C kaj D' estu la verticoj de kvaredro. Demonstru, ke ankaŭ A', B', C' kaj D' estas la verticoj de kvaredro, kaj ke ambaŭ kvaredroj havas la saman volumenon.

antaŭ-olimpiado en Finnlando — Heikki Alikoski

Dum Julio 1977 okazis en Beograd la 19aj internaciaj olimpiadoj pri matematiko. En Finnlando, Asocio de Instruistoj de Matematikaj fakoj sendis al la lernejoj, jam la 1an de Oktobro 1976, eliminajn problemojn, kiujn la lernantoj povis solvi tute libere hejme ; ili devis sendi la rezultojn al la Instruisto-asocio antaŭ la 25an de Novembro 1976. La 10an de Januaro 1977 oni organizis en Helsinki por la lernantoj plej bone solvintaj la eliminajn problemojn, fin-ekzamenon, kies daŭro estis tri horoj kaj duono, kaj laŭ kiu oni elektis ok partoprenontojn al la Internaciaj Olimpiadoj.

★ → Jen la eliminaj dek problemoj :

E.1 Oni elektas punkton E sur la diagonalo de paralelogramo ABCD. Estu F la simetria punkto de C rilate la punkton E. Tra la punkto F oni desegnas rektojn samdirektajn al la rektoj AB kaj AD, kiuj tranĉas AD kaj AB en la punktoj G kaj H. Montru, ke E, G kaj H situas sur la sama rekta linio.

E.2 Naturaj nombroj m kaj n, $m \neq n$, havas sekvantan econ : la aritmetika kaj la geometria mezvaloroj estas du-ciferaj nombroj, kaj oni ricevas unun de la alia, kiam oni interŝanĝas la ciferojn. Determinu m kaj n.

E.3 Sur la surfaco de la globo, kies radiuso estas unuo, situas kvin punktoj. Estu d la plej malgranda el la distancoj inter ĉi tiuj punktoj. Determinu la plej grandan eblan valoron de d.

E.4 Montru, ke ne ekzistas polinomo P, al kiu per ĉiuj reelaj nombroj samtempe validas la pliaĵoj : $P(x) > P'(x)$ kaj $P'(x) > P''(x)$.

★ Ĉu pliaĵo, malegalaĵo aŭ komparaĵo ? → apuda paĝo → ★

E.5 La grandeco de la angulo ABC estas φ ($\varphi < 180°$). La cirkloj c_1 kaj c_2 tanĝas la laterojn de la angulo ABC kaj tanĝas unu la alian eksteren. Determinu la proporcion de la cirklo-radiusoj.

E.6 Estu $a \geq 2$ kaj $n \geq 2$ entjeroj, kaj la aro $A = \{a, a^2, \dots a^n\}$. Estu B kaj C aroj, al kiuj validas : $B \cup C = A$ kaj $B \cap C = \emptyset$. Montru, ke la elementoj de B kaj C havas malsamajn sumojn.

E.7 Al entjeroj $a_1, a_2, \dots a_k$ validas $a_i \leq 2(k-1)$, $i = 1, 2, \dots k$. Montru, ke ekzistas pozitivaj entjeroj $p \neq r$ kaj q tiel, ke $a_p = qa_r$.

E.8 $[x]$ estas la plej granda entjero, kiu estas $\leq x$. Solvu la ekvacion $[x]^2 = [x^2]$ en la aro : $\{x \,/\, -10 \leq x \leq 2\}$.

E.9 Montru, ke la nombro $2^{147} - 1$ estas divizorebla per la nombro 343.

E.10 Ni diras, ke la latero A_iA_j de plurangulo $A_1A_2 \dots A_n$ vidiĝas el la punkto P interna je la plurangulo, se ĉiu streko PQ, kie Q estas interna punkto de la streko A_iA_j, estas en sia tuteco interne de la plurangulo. Montru, ĉu estas ĝusta aŭ malĝusta la jena aserto : el ĉiu interna punkto de ĉiu plurangulo vidiĝas iu latero de la plurangulo.

★ → Jen la kvar taskoj de la fin-ekzameno :

F.1 Estu $x_1, x_2, \dots x_n$ pozitivaj nombroj. Montru, ke :

$$(1) : \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Kiam en la plialaĵo (1) validas egalo ?

F.2 Estas donitaj la samcentraj cirklo-linioj c_1 kaj c_2. Estu punkto $P \in c_1$ kaj d iu diagonalo de la cirklo c_2. La finpunktoj de d estu Q_1 kaj Q_2. Montru, ke la sumo de kvadratoj de la strekoj PQ_1 kaj PQ_2 ne dependas de la elekto de P kaj d.

F.3 Estu x donita reela nombro. Esploru, kiu el la du nombroj $\sin(\cos x)$ kaj $\cos(\sin x)$ estas pli granda.

F.4 Pozitivaj entjeroj $a_1, a_2, \dots a_{100}$ efektivigas sekvantajn kondiĉojn :

(a) : $a_i \leq 100$, por $i = 1, 2, \dots 100$,

(b) : $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 200$

Montru, ke inter la nombroj $a_1, a_2, \dots a_{100}$ oni povas kolekti la nombrojn $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_n}$ (kie $i_p \neq i_q$ se $p \neq q$) tiel, ke : $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n} = 100$.

la prefikso mal- en matematika terminologio

François LO JACOMO

Jam de 1976 okazas inter kelkaj membroj de IAdEM vigla diskutado pri la uzado de la prefikso mal- en kelkaj matematikaj terminoj, interalie en "malegalaĵo" kaj "malaperto". Per tiu-ĉi mallonga artikolo mi celas resumi la nuntempan situacion, laŭ mia propra vidpunkto, kaj peti de ĉiu membro, ke li konigu sian opinion tiurilate, kaj sendu al mi ĉiajn atentigojn pri kromaj argumentoj (por aŭ kontraŭ), forgesitaj ekzemploj, preterlasitaj problemoj, ktp...

La vorton "malegalaĵo" mi uzas kiel tradukon de : angle "inequality", france "inégalité" kaj germane "ungleichung", do por signi : $A \leqslant B$ aŭ $A < B$ (aŭ $A \geqslant B$ aŭ $A > B$), kaj la vorto "malaperta" estas topologia vorto signanta la komplementon de aperto (angle "closed", germane "abgeschlossen" kaj france "fermé"). La unua kialo, pro kiu oni kritikis tiujn du terminojn estas, ke la prefikso mal- tiel uzata havus signifon sufiĉe malproksiman je sia komunlingva signifo. Ja, certe. Tamen tiun kritikon oni ne direktu nur al la prefikso mal-, sed al kvazaŭ ĉiuj matematikaj terminoj. Se mi parolas pri ringo, grupo, baro, vico, ktp... mi uzas komunlingvajn radikojn kun novaj signifoj. Kial tio, kio eblas por normalaj radikoj, ne eblus por prefiksoj aŭ sufiksoj ? Jam Thomas Pendlebury rimarkigis, ke ne la dividanto faras dividadon, nur la matematikisto aŭ la kalkulilo povas iel agi, nombroj estas nur pasiva materialo per kiu oni agas. Tamen la sufikso -ant- estas uzinda en tiu termino "dividanto", eĉ laŭ PIV, do kun signifo sufiĉe malproksima je ties komunlingva signifo. Kial ni ne agu same koncerne la prefikson mal- ?

Tamen kelkaj restas ĝenataj de la fakto, ke en malegalaĵo : $A \leqslant B$, A kaj B rajtas esti egalaj, same kiel malaperto rajtas esti samtempe aperto. Tio ne ŝajnas al mi plej kontraŭdira : ankaŭ homo rajtas esti mense juna kaj korpe maljuna aŭ inverse. Tiu homo estas granda kompare kun insekto kaj malgranda kompare kun elefanto, grandeco estas kaj avantaĝo kaj malavantaĝo, depende de la cirkonstancoj, kaj tio, kion mi diras, estas iusence vera, alisence malvera. Do por ke iu afero estu tia aŭ mal-tia, ne nur gravas tiu afero mem, sed ankaŭ la vidpunkto, laŭ kiu mi konsideras ĝin. Se mi asertas, ke iu spaco estas malaperta, mi intencas uzi la proprecojn de malapertaj spacoj, do mi konsideras ĝin laŭ preciza vidpunkto. Ĝi ja rajtas esti ankaŭ aperta, sed tio ne gravas por mi, krom se mi eksplicite aldonas tiun informon. Por montri, ke ne-malplena subspaco de koneksa spaco identas la plenan spacon, sufiĉas montri, ke ĝi estas kaj aperta kaj malaperta. Sed ja temas pri du sendependaj demonstradoj, ĉar necesas konsideri la saman spacon laŭ du tute malsamaj vidpunktoj. Se mi skribas : $1 + 1 \leqslant 2$, tiu malegalaĵo estas plene prava, kaj havas alian signifon ol la egalaĵo : $1 + 1 = 2$, ĉar en la malegalaĵo ne gravas la valoro de $1 + 1$, nur gravas, ke tiu valoro ne estas pli granda ol 2. Kompreneble estas malkonsilinde paroli pri malegalaj nombroj, sed tiun esprimon oni ne bezonas, nombroj estas ĉu egalaj, ĉu ne-egalaj, oni parolu pri malsamaj nombroj, sed ne malegalaj, cetere tian vorton "malegala" oni ne uzas (nek bezonas) franclingve.

Plia argumento estas, ke la vorton "malegalaĵo" mi kopiis el kelkaj lingvoj (angla, franca, germana, ...), kaj ke tiu termino ne estas la plej logika ero de tiuj-ĉi terminologioj. Krome, la prefiksoj "in-", "un-", en tiuj-ĉi lingvoj, povas signifi aŭ ne-, aŭ mal-, aŭ eventuale mis-, do kial elekti mal- ? Raoul Bricard (1905), Cyrillo Vörös (1911), Maurice Fréchet (1952), Aŝvinikumar (1966), Wladyslaw Klimek (1976), ... uzis la terminon "neegalaĵo". Ankaŭ Olav Reiersöl uzis tiun-ĉi terminon, ĝis kiam, en 1976, mi konvinkis lin, ke "neegalaĵo" laŭlogike signifas : $A \neq B$. Sed li nun opinias, ke malegalaĵo estu : $A \ll B$ (simbolo ne konata de mi). Rudolf Fischer male opinias, ke $A \neq B$ estu malegalaĵo, dum ne-egalaĵo estas iom taŭga, ne plej plaĉa, por : $A \geqslant B$. Laŭ mi, neegalaĵo estas aserto, ke du nombroj ne estas egalaj, ĝi ne rajtas esti io pli ol tio. Estas ja pli facile modifi la signifon de la prefikso mal- en matematika terminologio ol modifi la signifon de la negacio ne !

Yashovardan opinias, ke la prefikson mal- oni uzu nur, kiam temas pri du ekstremoj inter kiuj ekzistas amaso da mezaj punktoj. Gerard Cool rimarkigas, ke la prefikson mal- oni jam uzas en vortoj kiel malbildo (a apartenas al la malbildo de b se b estas bildo de a, do se f(a) = b), malderivaĵo, ktp..., ne utilas aldoni al tiu prefikso novan signifon. Mi atentigu, ke tiuj du argumentoj ne tiom facile akordigeblas, tamen ambaŭ estas parte pravaj. Inter la subaroj de iu aro ekzistas la plena subaro kaj la malplena (sub)aro ; ĉiuj aliaj subaroj situas inter tiuj du ekstremoj. Topologio, en kiu ĉiuj subaroj estas apertaj nomiĝas diskreta, kaj topologio, en kiu neniu subaro (krom la pleno kaj la malpleno) estas aperta, nomiĝu maldiskreta ; ĉiuj aliaj topologioj situas inter tiuj du ekstremoj. Tion mi plene konsentas, mi ankaŭ agnoskas, ke aperto estas topologia spaco, kies ĉiu punkto estas interna, sed mi ne konsentas, ke oni nomu malaperto topologian spacon, kies neniu punkto estas interna. Tian-ĉi spacon mi nomas "maldensa", tio ebligas interalie eviti la esprimon "malapertaj klozoj" en la studado pri la spacoj de Baire, kaj paroli simple pri "densaj apertoj" kaj "maldensaj malapertoj". Mi plene konsentas pri la uzado de malbildo, malderivaĵo, kaj similaj vortoj, mi eĉ uzis la vorton malfunkcio (p. 51), kaj mi ne tro malŝatas la proponon de Thomas Pendlebury nomi la negativajn entjerojn : mal-unu, mal-du, ... tiel distingante inter : log 0,2 = $\bar{1}$,30103... = malunu komo tri nul... kaj : log 0,05 = – 1,30103... = minus unu komo tri nul... ; sed nu, kial ne akcepti, ke la prefikso mal- havu plurajn signifojn en matematika terminologio ? Ankaŭ komunlingve tio okazas : ekzistas multaj mezpunktoj inter granda kaj malgranda, sed ne inter aperi kaj malaperi, fermi kaj malfermi, ...

Anstataŭ "malegalaĵo", Rudolf Fischer proponas "komparaĵo" kaj Olav Reiersöl proponas "pliaĵo" por $>$ kaj "plialaĵo" por $\geqslant$. La proponon de Olav Reiersöl mi ne konsentas, unue ĉar ĝi ne solvas la problemon pri malekvacio (ekzistas sama diferenco inter egalaĵo kaj ekvacio kiel inter malegalaĵo kaj malekvacio), due ĉar ĝi donas direkton al la malegalaĵo : $A > B$ kaj $B < A$ estas ekzakte la sama malegalaĵo, sed mi ne ŝatus uzi la vorton pliaĵo por $B < A$, nek uzi malsamajn vortojn por ambaŭ malegalaĵoj. Trie mi ne ŝatas la sufikson -al-. Laŭ mi, plialaĵo estas pli ofta nocio ol pliaĵo, krome en multego da cirkonstancoj ne gravas, ĉu la malegalaĵo estas strikta ($>$) aŭ ne strikta ($\geqslant$). La propono de Rudolf Fischer multe pli plaĉas al mi. Interalie ĝi ebligas konstrui la vorton "komparacio" = "malekvacio" ; Olav Reiersöl riproĉas al tiu propono, ke en la esprimo : "trovu la maksimumiganton de f(x) kiam $x \geqslant a$", ne temas pri komparo inter x kaj a. Evidente : temas simple pri kondiĉo aŭ hipotezo. Ankaŭ en la franca mi ne uzus tiam la vorton "inégalité", ĉar tiu vorto ne rilatas nur al la simbolo $\geqslant$, sed ankaŭ al la cirkonstanco en kiu oni uzas ĝin. Anstataŭ "malaperto" la plej konsentata propono nuntempe estas "klozo", kaj ankaŭ mi ne kontraŭas ĝin. Sed nu : kial proponi plu "malaperto" kaj "malegalaĵo" (kaj "malekvacio") se mi ja konsentas pri "klozo" kaj "komparaĵo" (kaj "komparacio") ?

Ĉar laŭ mi ne necesas, ke ekzistu unu nura vorto por esprimi iun matematikan nocion. Mi enkondukis (p. 48) la vorton "malpoluso" kiel sinonimon de "nulaĵo" (punkto, kie funkcio nuliĝas). Ambaŭ terminojn mi uzas, sed ne tute en la samaj cirkonstancoj : mi ekzemple ne parolos pri malpolusoj de polinomo ; sed se temas pri la dzeta-funkcio, kies malpolusoj estas tiom ĝenaj kiel polusoj, la vorto "malpoluso" tiam ebligos al mi insisti pri la parenceco inter ambaŭ nocioj. Pro tio mi opinias uzindaj la terminojn "malaperto" kaj "malegalaĵo", kvankam mi ne esence kontraŭas la terminojn "klozo" kaj "komparaĵo", ĉar ili klare montras la parencecon inter malaperto kaj aperto, malegalaĵo kaj egalaĵo, ja kun ioma modifo de la komunlingva signifo de la prefikso mal-, sed almenaŭ kun konservo de la ĉefa semantika kerno de tiu prefikso mal- (laŭ mi), nome : ke iu vorto kaj ties mal-vorto uzeblas en similaj kuntekstoj, do la uzado de la prefikso mal- ĝenerale ne influas al la cetero de la frazo, sed ĝi esence aliigas la entutan signifon de la frazo, pli ol la simpla neado de tiu frazo.

Jen mia propra opinio. Kaj la via ?

François Lo Jacomo, 14 rue de la Pompe, F – 75016 Paris, Francujo.

geometria terminologio

Gerard COOL kaj William ORR

Ene de nia terminologia agado, Gerard Cool sendis al William Orr, kunordiganto de la geometria agadkampo, proponon pri terminaro de elementa geometrio, kaj William Orr verkis komentojn pri tiu propono. Por instigi la membrojn de IAdEM al pli aktiva partopreno en la terminologian agadon, mi decidis publikigi ambaŭ en "Matematiko Translimen", sed kiel dialogo, do enmetante la komentojn de William Orr tuj post la koncernaj proponoj de Gerard Cool. Por distingi unu de la alia, troviĝos ĉe la maldekstra marĝeno dika streko, kiam temos pri komento de William Orr. Kaj tuj mi lasas lin fari kelkajn enkondukajn rimarkojn koncerne la proponon de Gerard Cool.

la redaktoro

Unue mi volas atentigi al baza demando. Ĉu plibonas eltiri komunlingvajn vortojn, kiel streko, kadro, spato, por faka uzado, aŭ ĉu oni prefere uzu vortojn tute aliformajn ? Avantaĝo de la unua sistemo estas, ke ofte oni povas elekti simplan, unusilaban radikon, kies komunlingva signifo pli-malpli proksimas al matematika koncepto. Avantaĝo de la dua estas, ke la terminoj klare frapus la leganton kiel faka termino kaj tiel ne trompus per konfuzigo pri malpli preciza senco. Ĉiun rimedon uzas diverse naciaj lingvoj. Ekzemple, al nematematikisto grupo kaj aro estas preskaŭ la sama afero, sed oni ŝajne ne sentis la bezonon krei tute novan vorton por matematika grupo.

Do, tiun demandon mi volis prezenti por plua interdisputado. Ofte Sro Cool preferas la unuan, ni diru "redifinan" rimedon, anstataŭ la "novvortan".

Nun, mi pritraktos la unuopajn terminojn :

(Jen la proponoj de Gerard Cool) :

0 - figuroj = punktaroj

1 - la elementoj = elementaj punktaroj, estas : punkto (0-dimensia), linio (1-dimensia) kaj surfaco (2-dimensia).

2 - linio povas esti senfina aŭ fermita, sennoda, ununoda aŭ plurnoda, rekta aŭ malrekta (kurba), aŭ miksa (rompita, aŭ konsistanta el partoj rektaj kaj kurbaj), ebena aŭ neebena, ktp.

3 - surfaco povas esti ebena aŭ kurba, limigita aŭ nelimigita, ktp.

4 - rekta linio = rekto, ebena surfaco = ebeno. Rekto estas senfina kaj ebeno nelimigita.

Ekzemploj pri linioj : parabolo, sinuslinio, estas senfinaj, kurb(aj lini)oj.
plurangul(rand)o estas sennoda, fermita, rompita linio.
ŝraŭblinio estas neebena, senfina kurbo.

5 – parto de senfina linio povas esti unufina aŭ dufina. Punkto de rekto (dis)partigas la rekton laŭ du unufinaj partoj = duonrektoj. Dufina parto de rekto = streko (mi malrekomendas "segmento" de PIV, ĉar por tiu grava koncepto ĝi estas iom longa, kaj ĉar cirklo- kaj sfer-segmentoj aspektas vere aliaj. Kaj mi elektas la vorton streko ĉar ĝi estas simpla, Esperanta vorto kun eĉ preskaŭ precize tiu signifo, nur iom pli konkreta ; kaj due, ĉar la germana vorto por tiu koncepto sonas kaj skribiĝas preskaŭ tute egale).

6 – la (kvantigita) enhavo de streko = longo, mezurita per longunuoj (ekzemple m, cm, ...). Duonrekto kaj rekto ne havas longon, aŭ : havas longon nefinian (atentu : rekto estas senfina, ĝia longo estas nefinia !).

7 – pluraj linioj en surfaco dispartigas tiun surfacon laŭ kampoj, kiuj povas esti limigitaj aŭ nelimigitaj.

8 – la (kvantigita) enhavo de ebena kampo estas la areo, mezurita per areunuoj (ekzemple m^2, ktp). (Atentu : nelimigita ebena kampo ofte havas areon nefinian, sed ne ĉiam : la kampo inter la kurbo $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ kaj la x-akso estas nelimigita, sed la areo estas finia (nome = $\sqrt{2\pi}$)).

9 – la longo de la interlig(a strek)o inter du punktoj = la distanco inter la du punktoj. La longo de la malplej longa interligo de du figuroj estas la distanco inter la du figuroj.

10 – pluraj surfacoj dispartigas nian tutan (3-dimensian) spacon laŭ (3-dimensiaj) regionoj, kiuj povas esti limigitaj aŭ ne limigitaj. La (kvantigita) enhavo de regiono = volumeno de tiu regiono. Ankaŭ nelimigita regiono povas havi finian volumenon. Ĝi estas mezurita per volumenunuoj (ekzemple cm^3).

Mi demandiĝas, ĉu necesas du terminoj kampo kaj regiono por 2-, resp. 3-dimensia spaco ? Ĉu en (pli ol 3)-dimensia spaco oni uzu regiono-n ?

11 – unu el la aksiomoj diras : se du rektoj havas almenaŭ du punktojn komunajn, ili havas ĉiujn komunajn. Tiam ili estas identaj.

12 – alia diras : se rekto havas kun ebeno almenaŭ du punktojn komunajn, tiam ĝi havas ĉiujn komunajn kun la ebeno ; la rekto troviĝas (estas, kuŝas, situas) en la ebeno = la ebeno entenas la rekton = la ebeno pasas tra la rekto. Samaj esprimoj pri sfersurfaco kaj cirkloj, ktp.

13 – komuna punkto de du rektoj, de rekto kaj ebeno, ĝenerale de du figuroj = sekcpunkto. La sekcpunktaro de du figuroj = sekcaĵo : ĝenerale du ebenoj havas kiel sekcaĵon rekton.

Min ĝenas la verbo sekci, kvankam ĝi estas sufiĉe vaste uzata, pro trosimileco al seksi. Ĉu ne prononciĝas sekcpunkto, sekcaĵo preskaŭ same kiel sekspunkto, seksaĵo ? Malgraŭ mia estetika kontraŭo, mi agnoskas la utilecon de la radiko sekc- kaj ne povas proponi pli bonan alternativon ol tranĉ-, kiu ankaŭ ne plaĉas al mi.

Rekto a sekcas rekton b = rekto b sekcas rekton a = la rektoj a kaj b sekcas sin = la rektoj a kaj b intersekcas (netransitiva, ... tiun ĉi esprimon mi rekomendas) ... Do : la rektoj a kaj b intersekcas laŭ (en) la sekcpunkto S. (Kiun prepozicion elekti ? "en" eble estas iom pli internacia (?), "laŭ" iom pli plaĉa al mi).

Ĉu oni diru, ke a kaj b ne intersekcas, kiam la sekcaĵo estas la nularo ?

Mi preferas la prepozicion en al laŭ post intersekcas. Sed kial ne ĉe, aŭ la neŭtrala (eble malrapide mortadanta) je ?

14 – paralelaj povas esti du ebenoj (sen komuna punkto), ebeno kaj rekto (sen komuna punkto) kaj du rektoj (sen komuna punkto kaj tiaj, ke ekzistas ebeno tra la rektoj). Du rektoj tiaj, ke ne ekzistas ebeno tra ili (tiam ili ne povas havi komunan punkton), estas oblikvaj inter si aŭ (inter)oblikvaj. (En pluraj naciaj lingvoj oni diras "kruciĝantaj", sed tion ĉi ĝuste en tiuj naciaj lingvoj konfuzas lernantoj ĉiam kun "intersekcaj". Alia vorto por tiu koncepto estas "ventoblikva" (!). Tio kondukas min al mia simpla propono de interoblikvaj). Du rektoj povas esti, laŭ ordo de malkreskanta ĝeneraleco : interoblikvaj, intersekcaj, paralelaj (kaj identaj). Nur en la kazo de interoblikveco ne ekzistas ebeno tra ili. Ebenon difinas tri punktoj nesamrektaj aŭ du paralelaj rektoj aŭ rekto kaj neentenata punkto.

Pro la gramatika fleksebleco de Esperanto, oni povas ankaŭ diri "l paralelas al m" kaj nomi l-on "paralelo" (= "paralela rekto") al m, kiam ne eblas konfuziĝo inter rekto kaj ebeno. Fakte, mi konsilus uzadon de kunmetitaj formoj kiel m-paralelo.

Kelkfoje oni volas fari de paraleleco ekvivalentrilaton, t.e. "paralela aŭ identa". Mi sugestas samdirekta. Se oni emas uzi la -al-sufikson de Reiersöl, tio estus paralelala ! ("... paralelala al la latero." ?!).

Pri oblikva, vidu sub (43).

15 – angulo povas havi plurajn signifojn : du duonrektoj kun komuna finpunkto (la vertico) ; la kampo inter tiuj duonrektoj (angulkampo) ; la mezuro laŭ kiu unu duonrekto turniĝu (rotaciu), por ke ĝi identiĝu kun la alia (angulmezuro).

16 – plenangulo (koresponda kun plenrotacio) = 360° (gradoj) = 2π (radianoj) ; streĉita angulo = 180° ; orta angulo = 90° ; akuta angulo $<$ 90° ; obtuza angulo : inter 90° kaj 180° ; superstreĉita angulo : inter 180° kaj 360° ; komplementaj anguloj havas sumon de 90°, suplementaj anguloj havas sumon de 180°.

17 – du intersekcantaj (plen)rektoj naskas kvar angulojn. El tiuj kvar anguloj troviĝas : kvar paroj de apudaj anguloj, tia angulparo estas suplementa. Du paroj de kontraŭaj anguloj, kontraŭaj anguloj estas egalaj.

18 – du paralelaj rektoj kaj unu rekto sekcanta la aliajn naskas ok angulojn. El ili troviĝas :

4 paroj de korespondaj anguloj (egalaj),

4 paroj de alternaj anguloj (egalaj), (du paroj interne-, du paroj ekstere alternaj),

2 paroj de interne samflankaj anguloj (suplementaj),

2 paroj de ekstere samflankaj anguloj (suplementaj).

19 – rekto tra la vertico de angulo, kiu duonigas tiun angulon = duonanto de tiu angulo.

20 – se unu el la kvar naskitaj anguloj de kazo (17) estas orta, tiam ĉiuj kvar estas ortaj. Tiam ĉiu el ambaŭ rektoj estas orta al la alia aŭ ortanto de la alia.

Tezo : ortanto al du intersekcantaj rektoj de ebeno estas ortanto al ĉiu rekto de tiu ebeno. Tia rekto = ortanto de tiu ebeno. Kaj tiu ebeno = ortebeno de tiu rekto. La ortanto de iu streko pasanta tra ties mezo = mezortanto de tiu streko. Same : mezortebeno de streko, kiu laŭ tezo estas la aro de la punktoj de la spaco, kiuj havas la saman distancon (longon) al la finpunktoj de tiu streko.

21 – n-angulo povas fakte havi plurajn signifojn :

* sennoda fermita rompita linio, kiu konsistas el n strekoj, la lateroj, kaj n punktoj, la verticoj, (= la n-angulrando) ;
* la kampo limigita de tiu rando (= la n-angulkampo),
* la punkto-n-opo nesamrekta,
* la tuto de n verticoj, n lateroj kaj n (internaj) anguloj.

Tezo : la angulsumo de ajna n-angulo = (n-2).180°

22 – ĉu la koncepto plurangulo inkluzivu la koncepton triangulo ? En miaj konataj lingvoj tio ne estas klara. Mi proponas, ke ne. Ke do plurangulo = 4 aŭ 5 aŭ 6 aŭ ... angulo. Kaj do : n-angulo = tri-aŭ-plurangulo.

23 – la simplekso de la ebeno estas la triangulo. ĉiu triangulo estas konveksa. Plurangulo povas esti konveksa aŭ nekonveksa.

24 – ĉe plurangulo povas ekzisti (ĉe triangulo certe ekzistas) cirklo, kies rando pasas tra ĉiuj verticoj = la ĉirkaŭskribita cirklo, mallonge : la ĉirkaŭcirklo. Analoge pri cirklo, kies rando tanĝas ĉiujn laterojn = enskribita cirklo = encirklo. Tiaj pluranguloj nomiĝas kordaj, resp. tanĝantaj pluranguloj.

25 – plurangulo kun samcentraj ĉirkaŭ- kaj en-cirklo = regula plurangulo ; ĝiaj lateroj kaj anguloj estas egalaj. Regula triangulo ankaŭ nomiĝas egallatera ; regula kvarangulo ankaŭ kvadrato.

26 – ĉar ankaŭ estas konata la vorto "pentagono" por regula kvinangulo, mi proponas ĝenerale : trigono, tetragono, pentagono, heksagono, ktp. = regula tri-, kvar-, kvin-, ses-angulo, ktp.

27 – ĉar ankaŭ estas konata vorto "pentagramo" por regula kvin(pinta)stelo, mi proponas ĝenerale : pentagramo, heksagramo por la regulaj 5-, resp. 6-stelo. La vortoj 7-stelo, 8-stelo, ktp. ne plu estas unusencaj : 7-stelo ekzemple povas esti po 2 arka kaj po 3 arka, sed ĉiam unuparta (desegnebla per unu linio). 10-stelo povas esti unuparta-po 3 arka, duparta-po 2 arka, duparta-po 4 arka, ktp.

28 – la simplekso de la spaco estas la kvaredro, kiu havas 4 edrojn (ĉiuj trianguloj), 6 eĝojn kaj 4 verticojn. Pluredro povas havi analogajn signifojn kiel plurangulo : ĝi havas pli ol 4 edrojn. n-edro havas n edrojn. n povas esti 4, 5, 6, ktp. La nombro da eĝoj kaj verticoj ne bezonas esti n. Tiuj nombroj de "Eulera" pluredro plenumas la "Euleran" rilaton : edroj + verticoj = eĝoj + 2. En n-edro ĉiu edro estas m-angulo (m = 3, 4, 5, ktp, ankaŭ en la sama n-edro). La ebenoj al kiuj apartenas (en kiuj kuŝas) la edroj estas la portant(aj eben)oj de la edroj. Ili enfermas la n-edron.

29 – ĉiu kvaredro havas ĉirkaŭ(skribitan)sfer(surfac)on, tio estas sfersurfaco, kiu pasas tra ĉiuj kvar verticoj. Same ĉiu kvaredro havas en(skribitan)sfer(surfac)on, tio estas sfersurfaco, kiu tanĝas ĉiujn edro(portanto)jn. Pluredro ĝenerale havas nek ĉirkaŭsferon nek ensferon, sed ekzistas pluredroj kun unu aŭ alia aŭ ambaŭ. Ekzistas kvaredroj kaj pluredroj, kiuj havas eĝosferon, tio estas sfersurfaco, kiu tanĝas ĉiujn eĝojn.

Laŭ PIV, edro estas la tuta ebeno, faco estas nur la limita parto, la plurangulo. En mia teksto pri pluredroj (SUK 1976) mi uzis nur edro-n en la dua senco kaj evitis faco-n. En ebeno PIV difinas latero-n kiel nur la strekon bordantan plurangulon (aŭ plurlateron). Kial ne diri, ke edro, latero, estas la senfinaj ebeno, resp. rekto, kaj faco, eĝo estas la limitaj kampo, resp. streko ?

30 - n-edro, kiu havas samcentrajn ĉirkaŭ-, en- kaj eĝo-sferon, nomiĝas (plen)regula n-edro. Pruveble estas, ke tia n-edro havas ĉiujn edrojn kongruaj kaj regulaj, ke en ĉiuj verticoj kunvenas same multaj eĝoj (do edroj, do edro-anguloj), kaj ke ĝi estas konveksa. Pruveble estas ankaŭ, ke da tiaj plenregulaj n-edroj nur ekzistas 5 : la plenregulaj 4-edro, 6-edro (kubo), 8-edro, 12-edro kaj 20-edro, aŭ, laŭ ofta kutimo, la : tetraedro, heksaedro, oktaedro, dodeka-edro kaj ikosaedro, do sen la aldono "regula".

La difinon de regula laŭ sferoj mi trovas stranga. Ĉu oni ne ordinare diras, ke reguleco signifas regulecon kaj kongruecon de la facoj, resp. verticoj ?

Estus eble utile, ke la regulaj pluredroj havu proprajn nomojn eĉ internaciajn (fakte en angla lingvo, kvankam "icosahedron" ekzemple ne signifas nepre la regulan, oni plej ofte uzas ĝin tiusence sen aldoni "regular") ; sed oni nur dezirus, ke ne tiel similu dodekaedro kaj dudek-edro.

31 - ekzistas kelkaj pluredroj kun ĉiuj nomitaj ecoj de (30) escepte la konvekseco. Tiaj n-edroj (pluredroj) povus nomiĝi kvazaŭregulaj.

32 - pluredro konveksa kun sferoj ĉirkaŭskribita kaj eĝa samcentraj, havas ĉiujn eĝojn egalaj kaj ĉiuj ĝiaj edroj estas regulaj plurangulo j. Pluredro konveksa kun samcentraj eĝosfero kaj ensfero havas ĉiujn eĝojn egalaj kaj ĉiujn edrojn kongruaj (ne necese regulaj). Ambaŭ specojn de n-edroj oni povus nomi preskaŭregulaj.

Ekzemplo de la unua speco estas la kubotrunko kun 8 trianguloj regulaj, kaj 6 kvadratoj. Ekzemplo de la dua speco estas la rombo12edro kun 12 rombaj edroj. La du pluredroj estas la dualaĵoj unu de la alia. Por ĉiu n ($\geq$ 3) ekzistas regula n-flanka prismo, kun n kvadratoj kaj du regulaj n-anguloj kiel edroj, kiu plenumas la ecojn de la unua speco. Tial mi nomus tiujn prismajn pluredrojn preskaŭregulajn triviale preskaŭregulaj kaj la ceterajn fakte preskaŭregulaj. La nombro da tiaj estas nur finia.

Ĉar estas du specoj de preskaŭregulaj pluredroj, kial ne du nomoj ? Eble preskaŭ- por la unua kaj kvazaŭ- aŭ pseŭdo- por la dua.

Koncerne la nomojn de tiuj : en mia SUK-teksto, mi uzis la verbon senpintigi por la procedo per kiu oni fortranĉas per ebeno verticon kaj partojn de la tieaj eĝoj kaj facoj. Oni povas dumaniere krei tiel preskaŭ-regulaĵon. Mi distingis inter "parta senpintigo" kaj "tuta senpintigo". Kompreneble tiu sistemo naskis terure longajn terminojn, kiel ekzemple tute senpintigita dudekedro - kiun nomus Cool dudekedrotrunko, aŭ eble ikosaedrotrunko, ĉar temas pri la sama pluredro (vidu sub (45) pri la vorto trunko). Sed fakte la "trunko" identas ĉiam al la "trunko" de la dualaĵo. Tial mi sekvis la anglan uzadon kaj diris kub-okedro (aŭ eble nun kub-oktaedro) kaj dudek-dekduedro (aŭ ikosa-dodekaedro), vere hermafro-ditaj nomoj. Por la parte-senpintigaĵoj, mi nur malaperigis la "parte-".

Por la tri pluaj solidkreaj procedoj mi uzis la verbojn raboteti, rabotegi, kaj tordi, kaj ties participoj. Nu, ĉu ne estas bona prononcekzerco la rabotetita dudek-dekduedro ? En la naciaj lingvoj la nomoj ne estas malpli komplikaj, nur malpli logikaj.

Al la prismoj oni devas aldoni la pseŭdoprismojn (anglalingve "biprisms"), en kiuj du regulaj n-anguloj havas inter si 2n triangulojn, kiel speco de tamburo.

Oni ofte uzas la terminon arkimedaj por la nek prismaj nek pseŭdoprismaj preskaŭregulaĵoj (de la unua speco).

33 – specialaj rektoj de triangulo :

* 3 mezortantoj (nome tiuj de la lateroj),
* 3 duonantoj (nome tiuj de la internaj anguloj),
* 3 mezantoj (ligantaj verticon kun la mezo de la kontraŭlatero),
* 3 ortantoj (el vertico, orte al la kontraŭlatero).

La mezortantoj pasas tra la ĉirkaŭsfercentro,
la duonantoj pasas tra la ensfercentro,
la mezantoj pasas tra la pezopunkto,
la ortantoj pasas tra la ortpunkto,

La unua kaj lasta punktoj povas esti ankaŭ ekster la triangulkampo, la dua kaj tria ĉiam estas interne de la triangulkampo. Ortanto estas rekto. La parto (streko) inter vertico kaj kontraŭlatero (aŭ ĝia portanto) nomiĝas alto (rilate tiun lateron).

Kial oni uzas la terminon ĉirkaŭsfercentro, ktp, rilate triangulon ? Ĉu oni ne plej ofte interesiĝas pri la ĉirkaŭcirklo, kiam temas pri ebena figuro ? Mi sugestas laŭ la angla maniero uzi simple : ĉirkaŭcentro, encentro, anstataŭ ĉirkaŭcirklocentro kaj encirklocentro.

Laŭ PIV alto portas la tri sencojn : la rekto, la streko, kaj ties longo. Cool distingas inter la unua kaj la dua, sed ne inter la dua kaj la tria. Ŝajne tio sufiĉas.

34 – specoj de trianguloj : triangulo povas esti : akut(angul)a aŭ ort(angul)a aŭ obtuz(angul)a, regula aŭ egallatera (havanta tri egalajn laterojn), aŭ simetria (havanta precize du egalajn laterojn) aŭ nesimetria. De orta triangulo la plej granda latero (kontraŭ la orta angulo) = hipotenuzo, la aliaj = la katetoj. Inter ili validas la teoremo de Pitagoro. Simetria triangulo havas la angulojn kontraŭ la egalaj lateroj egalaj ; ili estas la bazanguloj kaj la latero inter ili : la bazo.

35 – formulo por la aero de triangulo estas $\frac{1}{2}$.b.a, b = bazo kaj a = alto ; ĉiu el la lateroj povas roli kiel bazo, la alto tiam estas la alto, kiu rilatas al la bazo.

36 – diversaj kvaranguloj : trapezo (unu paro (precize) de paralelaj lateroj), kvarangulo kun simetricentro (-punkto) estas paralelogramo (ambaŭ paroj estas paralelaj). Ort(angul)a paralelogramo jam estas sufiĉe konata sub la nomo "rektangulo". Same en pluraj naciaj lingvoj ĝi nomiĝas simile. Sed tamen mi ŝatus malrekomendi tiun vorton, ĉar tro stranga. Analogie al paralelogramo trudiĝas ortogramo ; krome mi volas proponi alternativon kiel kadro aŭ bordo aŭ simile. La alia kvarangulo kun du simetriaksoj estas la rombo (kun egalaj lateroj). La du kvaranguloj kun unu simetriakso estas la simetria trapezo kaj la kajto. La plej regula kvarangulo estas la kvadrato. La areformulo por paralelogramo estas b.a (bazo foj alto).

Mi akordas pri la netaŭgeco de la ŝajne miskunmetita rektangulo (ĉu kontraste al kurbangulo ?). Inter la diversaj alternativoj mi voĉdonus por ortogramo, sugestita de Dro Reiersöl, precize ĉar la signifo estas klara je unua vido, kvankam la vorto estas neologismo. La Slipara Vortaro presis slipon kun la vorto oblongo, tradukita anglen kaj francen per "rectangle", sed kun la difino "ortangula paralelogramo, kies lateroj havas du grandecojn". Unu problemo, kiu enpaŝas kun la uzo de ordinara vorto kiel kadro, estas, ke oni malutiligas la ordinaran vorton. Ekzemple, ĉu oni ne povas esti miskomprenita, uzante la frazaron "en la kadro de" en geometria eseo ? Eble mi trograndigas tiun danĝeron, sed ĝi ja ekzistas.

Laŭ Cool, kvadrato estas ortogramo, kaj ortogramo estas paralelogramo, sed tiu lasta ne estas trapezo. Mi demandas, kial oni insistu pri la neparaleleco de la du aliaj lateroj ? Ekzemple, kiam oni uzas la trapezan metodon por stimi la areon sub kurbo, povas okazi, ke iam la "trapezo" estas fakte ortogramo. En kiu kunteksto estas grave insisti pri tiu neparaleleco ?

37 – n-angulo estas speco de sennoda, fermita linio. Ĉe ĝenerala sennoda, fermita linio oni povas distingi la kampon kaj la randon. Kvantigite ili estas la areo kaj ĉirkaŭlongo.

38 – la kombinon de ebena kampo kun ties rando PIV nomas "ebena figuro" kaj la kombinon de (spaca) regiono kun ties surfaco PIV nomas "solido". Mi demandas min unue, ĉu necesas tiuj konceptoj (do, ĉu ne sufiĉas kampo kaj regiono), kaj due, ĉu ne ekzistas terminoj pli taŭgaj, pli analogaj unu al alia ?

Pri figuro kaj solido, kaj ties PIV-aj difinoj, mi respondu, ke ja tiuj konceptoj gravas, sed plejparte en topologio, maksimumteorio, ktp. Solido estas tute respektinda termino ; pri la speciala uzo de figuro mi ankaŭ ŝatus eltrovi pli analogan vorton.

39 – Do, ĉe "solido", oni povas distingi inter la regiono, kiu kvantigita estas la volumeno, kaj la surfaco, kiu kvantigita estas la surfac-areo.

40 – Ekzemploj :

la ĉirkaŭlongo de cirklo(rando) = $2\pi r$, la areo de cirklo(kampo) = πr^2
la surfacareo de sfer(surfac)o = $4\pi r^2$, la volumeno de sfer(region)o = $4/3.\pi.r^3$

41 – klaso de n-edroj estas la f-flankaj prismoj. f-flanka prismo konsistas el du f-angulaj edroj (la bazaj edroj) kongruaj kaj paralelaj kaj el f paralelogramaj edroj, la flankaj edroj.

42 – la volumeno de prismo = B.a = (unu el la) baza(j) areo(j) – foj – la alto (t.e. la distanco inter la paralelaj bazaj edroj).

43 – prismo povas esti orta (tiam la flankaj edroj estas ortogramoj) aŭ oblikva. Se de orta prismo la bazaj edroj estas regulaj f-anguloj, la prismo nomiĝas regula prismo. Regula prismo f-flanka havas simetricentron (-punkton), (f + 1) simetriebenojn, unu turnakson f-ordan kaj f simetriaksojn, nome turnaksojn du-ordajn.

Ĉi tie Cool uzas oblikva en la senco "nek orta nek samdirekta". Sed tiu malsamas al la antaŭa uzo : "du rektoj, kiuj ne kuŝas en ebeno". (vidu (14)). Tiun lastan ni esprimas angle per la vorto "skew" (skju), sed mi vane serĉis analogajn terminojn en aliaj lingvoj. Lastatempe mi ricevis de Sro Eichholz slipoproponon faritan de Werner kun la vorto preterkurantoj. Tiu vorto, aŭ alia kun la prefikso preter-, ŝajnas al mi plej taŭga. La tradukoj estas : france "droites non coplanaires", angle "skew lines", germane "schiefliegende Achsen".

44 – solido havas turnakson f-ordan signifas : oni devas turni la solidon ĉirkaŭ tiu akso je (1/f).360° aŭ oblo de tiu angulo por ke la solido en lą nova situo kovru precize sin mem en la malnova situo.

45 – ebeno inter la bazaj edroj de prismo kaj ne paralela al tiuj bazaj edroj, dispartigas la prismon en du prismotrunkojn. Nur 3-flanka prismostumpo havas simplan volumenformulon.

En mia ekzemplero de la manuskripto de Cool aperas ambaŭ -trunko kaj -stumpo. Ŝajnas al mi, ke la uzo de -stumpo precize konformas al la ordinara lingvo, dum trunko estas tute alia afero.

46 – f-flanka piramido havas unu bazan edron, kiu estas f-angulo, kaj f flankajn edrojn, kiuj estas trianguloj. La vertico, kiu ne limas la bazan edron, estas la pinto.

Se la nebazaj facoj de piramido estas flankoj, ĉu ankaŭ taŭgas uzi tiun vorton por ĉiu el la du ebenduonoj, en kiujn rekto tranĉas ebenon ? Kaj simile koncerne la "flankojn" de ebeno en spaco. Rilate al tiu demando, ĉu preferindas ebenduono (laŭ modelo de jarcento) aŭ duonebeno, duoncirklo, duonsfero, ktp. ?

47 – la volumenformulo de ajna piramido estas : (1/3).B.a.

48 – se de f-flanka piramido la f bazeĝoj estas egalaj inter si kaj la f pinteĝoj inter si, tiam la baza edro estas regula f-angulo. Tia piramido nomiĝas regula piramido.

49 – 3-flanka piramido estas 4-edro kaj inverse. La lasta nomo estas klare preferinda, ĉar ĝi atentigas pri la fakto, ke ĉiuj 4 edroj estas ekvivalentaj, kaj ekzemple ĉiu el ili povas roli kiel baza edro.

Atentu : kvankam supraj terminoj do estas ekvivalentaj, ili kune kun la adjektivo regula ne plu estas. Regula 4-edro estas ankoraŭ pli regula ol regula 3-flanka piramido !

50 – ebeno inter pinto kaj baza edro de piramido kaj paralela al tiu baza edro, dispartigas la piramidon en piramideton (formegalan, eĉ direktegalan kun la tuta piramido) kaj piramidotrunkon.

51 – speciala prismo 4-flanka estas tia, ĉe kiu ankaŭ la bazaj edroj estas paralelogramoj. La oficiala nomo estas paralelepipedo. Kaj se ĉiuj 6 paralelogramoj eĉ estas ortogramoj, ĝi nomiĝas oficiale orta paralelepipedo !

52 – nu, miaflanke ekzistas urĝa bezono provizi la kvar gravegajn figurojn per mallongaj, simplaj nomoj. Mi proponas : paralelogramo = parmo, ortogramo = kadro, paralelepipedo = spat(solid)o (mi kredas, ke ĉiuj spatkristaloj havas tiun formon ; germana vortuzo). Orta paralelepipedo = briko. Mi urĝe proponas tiujn kvar mallongigojn kiel samrajtajn sinonimojn por la oficialaj !

Vidu noton ĉe (36).

Mi sugestas, ke oni elektu ĉiuokaze terminojn por tiu klaso de figuroj laŭ unu regulo ; t.e. aŭ preni nur la "internaciajn" terminojn, aŭ emfazi la ordinarajn "redifinitajn" vortojn, aŭ krei simplajn neologismojn, kiel ortogramo. Mi inklinas nun al la tria rimedo.

53 - cirklo : la diametro = duoble la radiuso. Du punktoj sur cirklorando dispartigas ĝin laŭ du arkoj ; ĉe ĉiu arko korespondas unu kordo, sed al ĉiu kordo du (kompletigaj) arkoj. Arko estas kvantigita laŭ du manieroj : kiel angulmezuro (arka centrangulo) kaj kiel longo (arklongo).

Teoremo : randangulo de cirklo = la duono de la koresponda ark(a centrangul)o.

Se P, A kaj B estas samrektaj kaj A kaj B cirklorandpunktoj variaj (sed la cirklo kaj P konstantsituaj), do la produto de la vektoroj $\vec{PA}.\vec{PB}$ estas konstanta, kaj ĝi nomiĝas la potenco de punkto P rilate al la cirklo.

Sekcanto dispartigas cirklokampon laŭ du cirklosegmentoj ; cirklosegmento kun responda triangulo estas cirklosektoro.

54 - rotaciante linio(parto)n ĉirkaŭ ĝin ne sekcanta akso, oni akiras rotacisurfacon. Rotaciante kampon ĉirkaŭ ĝin ne sekcanta akso, oni akiras rotacisolidon. Rotaciante rekton ĉirkaŭ kun ĝi oblikva akso, oni akiras unufolian rotacihiperboloidon. Rotaciante rekton ĉirkaŭ kun ĝi paralela akso, oni akiras rotacicilindromantelon. Rotaciante rekton ĉirkaŭ ĝin sekcanta akso, oni akiras rotacikonusmantelon.

55 - la terminoj cilindro kaj konuso sen tiaj epitetoj estas pli ĝeneralaj, sed ankaŭ plursencaj. Por la elementa geometrio sufiĉas la rotaciaj cilindro kaj konuso.

56 - rotacicilindrosolido konsistas el la cilindromantelo kaj el la du cirklaj facoj. Ofte tiu solido estas nomata simple cilindro.

Rotacikonusosolido konsistas el la konusmantelo kaj la cirkla faco. Ofte ĝi analoge estas nomata simple konuso.

Oni devas aldoni, ke la konusosolido entenas nur tiun parton de la mantelo inter la bazo kaj la vertico (pinto). Mi demandas plue, ĉu oni rajtas uzi la vorton solido ĉi tie, se ne temas pri la interno ?

57 - oni distingu inter la mantelo kaj la surfaco (mantelo kun faco(j)) de la solidoj.

58 - ambaŭspecaj manteloj estas rektohavaj surfacoj. Tiuj rektoj (de senfina mantelo) aŭ strekoj (de solidomantelo) nomiĝas mantelrektoj, resp. mantelstrekoj. Ofte oni celas per la lasta vorto ankaŭ la longon (do fakte mantelstreklongo).

59 - ambaŭ manteloj ne nur estas rektohavaj, sed krome ebenigeblaj (senŝire). Ebenigite, cilindro(solid)mantelo iĝas ortogramo kaj konusmantelo cirklosektoro.

60 - konuso havas pinton kaj (rotaci)konuso havas konstantan angulon inter la konusakso kaj la mantelrektoj, la pintangulon. Ebeno, paralela al la faco de konussolido, dispartigas ĝin laŭ egaldirekta konussolido kaj konusa trunko.

Mi ripetas la sugeston, ke stumpo estas prefera al trunko.

61 – rotaciante duoncirklo(rando)n ĉirkaŭ ĝia diametro, oni akiras sfersurfacon. Rotaciante duoncirklo(kampo)n ĉirkaŭ ĝia diametro, oni akiras sfersolidon. Rotaciante cirkloarkon ĉirkaŭ ĝin ne sekcanta diametro, oni akiras sferzonon. Se la diametro supre pasas tra finaĵo de la arko, la sferzono estas sferĉapo. Rotaciante cirklosegmenton ĉirkaŭ ĝin ne sekcanta diametro, oni akiras sferŝelon (3-dimensia !). Du paralelaj ebenoj dispartigas sekcatan sfersolidon laŭ du sfersegmentoj kaj unu sferdisko. Sfersegmento kun koresponda konussolido estas sfersektoro.

62 – en sfersurfaco havas lokon multaj cirklo(rando)j, sed nur ĝis certa grando (de la radiuso). Tia plej granda cirklo nomiĝu maks(imum)a cirklo de la sfersurfaco. Al maksa cirklo korespondas du plej malproksimaj surfacpunktoj, la polusoj de la maksa cirklo. Al ĉiu surfacpunkto korespondas unu ekvatoro de tiu punkto, tio estas maksa cirklo de kiu la punkto estas unu el ambaŭ polusoj. (Por la nocio maksa cirklo, mi jam vidis "granda cirklo" aŭ "grandcirklo" laŭ nacilingva modelo. Ankaŭ mi aŭdis uzi "cirklego". Sed eĉ pli ol ĉe la vorto grandcirklo mi ne povas ĉe la vorto "cirklego" ne imagi gigantan cirklon... Tasko : desegnu cirklegon sur pizo !).

> En mia SUK-teksto pri ne-eŭklida geometrio mi uzis la vorton cirklego, sed tiu ĉi nun kuspas mian estetikan senton. Ofte uzita de diversaj aŭtoroj estas ĉefcirklo, kaj tion mi proponus.
>
> Kiel oni nomu sferan dulateron, t.e. du ĉefcirkloduonoj inter antipodaj punktoj (ekstremoj de diametro) ? C.M. Bean uzas daŭbo-n aŭ sferdaŭbo-n. Laŭ PIV daŭbo estas konusa surfaco. Anglalingve ni nomas tiun figuron "lune" (de latina luna, luno).

63 – forgesitaĵo : pri diagonaloj. En formo de problemetoj : esprimu per n la nombron da diagonaloj de n-angulo ! trovu la nombron da edrodiagonaloj kaj tiun da spacdiagonaloj de regula 12-edro !

64 – se du linioj sin tanĝas en punkto T (la tanĝ(o)punkto) kaj unu el tiuj linioj estas rekto, do tiu ĉi nomiĝas la tanĝanto de (al(?)) la linio en punkto T (ja ĝenerale estas nur unu). Se linio kaj surfaco sin tanĝas kaj la linio estas rekto, tiu ĉi nomiĝas (unu el la) tanĝanto(j) de la surfaco en la donita punkto T. Se du surfacoj sin tanĝas en punkto T kaj unu el ili estas ebeno, do tiu ĉi nomiĝas la tanĝebeno de la surfaco en T (ja ĝenerale estas nur unu). Tikla estas la problemo (traduka) difini : "du linioj tanĝas sin en T" ! ĉu jene : la du linioj intersekcas en du punktoj, kiuj estas identaj kun T ? ĉu jene : ili intersekcas en du punktoj, kiuj estas senfine proksime al T ? ĉu jene : ili intersekcas en T kaj en alia punkto, kies distanco al T estas infinitesim(al)e eta ? aŭ ĉu la sola kontentiga difino estas per la nocio limeso ? Teoremo : tanĝanto de cirklo estas orta al (ortanto de) la tanĝradiuso.

65 – iloj por konstrui geometriajn, ebenajn figurojn, estas : cirkelo, rektilo, ortilo, angulmezurilo.

66 – forgesitaĵo : ĉiu triangulo ne nur havas ĉirkaŭcirklon kaj encirklon, sed ankaŭ tri al(skribitajn)cirklojn, kies centroj estas sekcpunktoj de po unu intera duonanto kaj du eksteraj. Analoge kvaredro havas kvar al(skribitajn)-sferojn.

67 – du paralelaj rektoj situas en la sama ebeno kaj ne havas komunan (sekc)punkton. Sed ili havas komunan direkton. Laŭ la projekcia geometrio, du paralelaj rektoj havas tamen komunan punkton, sed specialan, laŭ kelkaj naciaj lingvoj nomatan "malproksima", "senfine malproksima", "nefakta", "ideala", por

nomi kelkajn. Nu, terminoj kiaj (senfine) malproksima povas esti konfuzaj ; "nefakta" estas negativa vorto, dum ĝuste tiaj punktoj montriĝas roli parte kiel faktaj punktoj kaj estas vere gravaj ; "ideala punkto" substrekas la gravecon, sed tamen efikas iom strange al mi. Mi proponas la (kompromisecan) terminon idea punkto, kontraŭe al fakta punkto. Ebeno havas nefinie multajn direktojn, do ideajn punktojn, kies aro estas la idea rekto de tiu ebeno. Ĉiu paralela ebeno pasas ankaŭ tra tiu idea rekto. La aro de ĉiuj ideaj rektoj estas la idea ebeno de la spaco.

Eble mi povas klarigi, kial ekzistas la esprimo ideala punkto en kelkaj lingvoj. Estas etimologia hazardo, ke idealis estis iam adjektiva formo de idea en la latina lingvo. Do, la idea punkto de Cool pli proksimas al la origina senco de la esprimo.

68 - rilatoj inter figuroj :

* kelkaj jam traktiĝis : paralela al (aŭ kun), orta al, intersekcanta, oblikva al (aŭ kun). En tiu ĉi kadro mi ne traktas la ecojn de la korespondaj relacioj (refleksiveco, simetrieco, transitiveco, ktp).

* streko a egalas al (egal) streko b (skribite : a = b) signifas, ke la streklongoj egalas. Tiuj strekoj a kaj b do estas egalaj, pli precize long(o)egalaj. Se la egalsigno (=) staras inter du ebenaj kampoj, tio signifas, ke iliaj 2-dimensiaj enhavoj, do iliaj areoj, egalas. Ili estas are(o)egalaj. Se la signo = staras inter du solidoj (regionoj), tio signifas, ke iliaj 3-dimensiaj enhavoj, do iliaj volumenoj, egalas. Ili estas volumenegalaj. Kaj longegala, kaj areegala kaj volumenegala fakte povus nomiĝi resume enhavegala. Du figuroj, kvankam ne enhavegalaj, povas tamen esti formegalaj, havantaj la saman formon. (En la germana kaj pluraj aliaj naciaj lingvoj ĝi nomiĝas "simila", vere netaŭga vorto ; en la nederlanda ĝi signifas proksimume formegala. Sed precipe pro la analogeco kun la ceteraj "egalecoj", mi proponas tiun terminon). La simbolo ofte estas la sama kiel tiu por nefinio (speco de kuŝanta ok). Figuroj, kiuj estas kaj enhavegalaj kaj formegalaj, nomiĝas kongruaj. (Kio pri la vorto "kovrebla" aŭ "kovregala" ?). Du figuroj ebenaj, kiuj estas transformeblaj unu en la alian per 1 spegulado (aksa) estas simetriaj (striktsence), ... per 3 speguladoj aŭ 1 spegulado : simetriaj (vastsence), ... per 2 aksspeguladoj : kongruaj (striktsence), ... kaj per 1, 2 aŭ 3 speguladoj : kongruaj (vastsence). Analoge, sed pli komplike, oni povas tiel distingi en la spaco. Rektojn aŭ ebenojn paralelajn oni eble povus nomi ankaŭ "direkt(o)egalaj", sed mi proponas rezervigi tiun ĉi terminon por : du kongruaj figuroj tiaj, ke ĉiu estas transformebla en la alian per (paralel)ŝovo, du formegalaj figuroj tiaj, ke ĉiu estas transformebla en la alian per (geometria) multipliko, nome tia figurparo havas ĉiun korespondan rektoparon kaj ankaŭ ĉiun korespondan ebenoparon paralela, do direktegala. Resume :

du elementaj figuroj (1- aŭ 2-dimensiaj) povas esti paralelaj, du pli kompleksaj figuroj povas esti direkt(o)egalaj.

Fine du figuroj povas esti identaj, tio estas ne nur kongruaj, sed eĉ okupantaj la saman spacon. (PIV donas por tiu nocio "koincidaj"). (PIV donas por direktegala "homotetia" kaj por identa "koincida". Al mi ŝajnas pli taŭgaj kaj travideblaj la de mi proponitaj terminoj).

Kongrua kaj kongrui estas tiel utilaj vortoj, ke mi konsilus ne anstataŭigi ilin per kovregala aŭ simile. (Kaj mi ŝvarce demandu, ĉu kokinoj festas per kovregalo ?).

69 – transformoj :

movoj aŭ kongruaj transformoj : ebena spegulado, aksa spegulado, centra (punkta) spegulado ; (paralel)ŝovo, rotacio kaj ŝovspegulado. Oni spegulas figuron laŭ (en(?)) ebeno, rekto aŭ punkto, ŝovas figuron per vektoro kaj rotacias figuron ĉirkaŭ punkto (centro) je angulo.

formegalaj transformoj : (geometria) multipliko el punkto (centro) per faktoro, rotaci-multipliko (el centro je angulo per faktoro), spegul-rotaci-multipliko, ktp. Nu, supraj formegalaj transformoj koncernas fakte nur tiujn en la ebeno. Mi ne traktas alispecajn (aksajn aŭ neaksajn) afinajn transformojn aŭ perspektivajn transformojn. Neforgesindas la projekciado de figuro sur rekton aŭ ebenon. Projekciado sur ebenon povas esti centra el centro fakta aŭ centro idea. Tiukaze ĝi estas paralela. Se la direkto de la projekciradioj estas orta al la projekciebeno, temas pri orta projekciado.

Ekzistas ankaŭ rotaci-spegulado, rotacio ĉirkaŭ akso kaj spegulado tra (laŭ) ebeno orta al la akso ; kaj ŝraŭbado, rotacio kaj ŝovo laŭ la akso. La Cool-a ŝovo estas la PIV-a translacio.

70 – la logika fundamento konsistas el pluraj aksiomoj kaj postulatoj, kiuj difinas ecojn kaj rilatojn de kaj inter (elementaj) figuroj nepovante (kaj neintencante) pruvi ilin. (Kio do fakte estas la diferenco inter aksiomoj kaj postulatoj ? Ĉu necesas distingo ?!). Teoremoj estas ecoj pri figuro kaj rilatoj inter figuroj, kiuj estas pruveblaj kaj pruvitaj surbaze de la aksiomoj (kaj postulatoj) per la leĝoj de la (formala) logiko, aŭ surbaze de jam pruvitaj teoremoj. Lemo estas laŭ PIV helpteoremo por helpi pruvi iom pli gravan teoremon.

Aldonindas ankaŭ korolario, Zamenhofaĵo laŭ PIV, kiu signifas teoremon, kiu memevidente sekvas de jam pruvita teoremo.

Pri gohiometrio kaj trigonometrio :

Nur mallonge sinuso, kosinuso, tangento kaj kotangento estu skribitaj jene : sin, kos, tan kaj kot, kaj eĉ en pli posta, faka stadio en kiu svarmas la formuloj, prononcataj precize tiel. Jen urĝa konsilo mia, interalie bazita sur kreskanta inklino kaj kutimiĝo de mi mem kaj miaj lernantoj en la reala instruo de tiu (al mi stranga) fako. Prononcekzemploj :

$\sin^2 x + \text{kos}^2 x = 1$ prononciĝu : "sin kvadrat de iks plus kos kvadrat de iks egal unu".

$\text{kos}(x-y) = \text{kos}\ x \ . \ \text{kos}\ y + \sin x \ . \ \sin y$: "kos de iks minus igrek egal kos de iks foj kos de igrek plus sin de iks foj sin de igrek". Kaj por memorigi tiajn formulojn, eĉ pli mallonge-draste : "kos de diferenco egal koskos plus sinsin"...... ktp, ktp.

Per la sinusteoremo kaj kosinusteoremo (eventuale tangentteoremo) de trianguloj estas kalkuleblaj ĉiuj pli naturaj kvantaj trigonometriaj demandoj kaj pruveblaj ĉiuj ne tro komplikaj pruvendaĵoj, laŭ mia sperto. (Nu, certe ĉiuj taskoj de svisaj konfederaciaj abituroj, kiujn mi renkontis ĝis nun). Sekanson kaj kosekanson mi signus per la inversoj de kos kaj sin.

Post multe da pripensado, mi volas iom komenti pri la sugestoj de Cool por prononcado de matematikaj formuloj. Estas bona ideo havi malgrandajn vortojn por esprimi multiplikadon, eksponentadon, ktp. Sed ŝajnas al mi danĝere, provi fortranĉi ĉiujn gramatikajn finaĵojn. Cool sugestas uzi "egal" ĉar la finaĵo -as indikas tempon, kiu ne estas eco de matematikaĵo. Mi malakordas. La finaĵo indikas unue verbecon kaj substrekas la rilaton inter la aliaj vortoj aŭ simboloj. Ke la tri finaĵoj de la indikativo ĉiuj kunportas tempon estas neeviteble en Esperanto. Sed tamen oni diras "Dio ekzistas", ne "Dio ekzist". La finaĵoj klarigas la sencon plejparte en la parolata lingvo, kaj tiun klarecon ni nek povas nek devas malpliigi. Kalocsay sugestis en Lingvo Stilo Formo, ke eventuale la poezia lingvo fallasu ĉiujn gramatikajn finaĵojn, pro ke la poetoj kaj poezientuziasmuloj tiel bone konus la lingvon, ke tiuj estiĝus nenecesaj. Nu, tio ne okazis, ĉar minimuma gramatiko estas necesa, eĉ por poezia klareco. Kiom pli por lekcioj en matematikaj kursoj !

Resume, mi akordas kun la sugestoj pri "je", "per", ktp. por aritmetikaj operacioj. Sed la senfinaĵaj "egal" kaj "foj" nur malhelpos la komprenon de la aŭdantaro.

Per tiuj ĉi 70 tezoj mi klopodis tiri pli-malpli kompletan fadenon tra tiuj kampoj de la geometrio, kiuj estas tradiciaj por la gimnazioj. Sed tiu ĉi trairita teorio ankoraŭ nun sufiĉus la postulojn de la malplifacila abitur-matematiko de la svisa konfederacia abituro. Mankas kompreneble la (termin-proponoj) de vektoroj kaj pli komplikaj kaj 3-dimensiaj transformoj, kaj pri matricoj, ...

Fine, mi gratulu Sron Cool pro bona starta laboro kaj multaj feliĉaj trovaĵoj. Post pli da pridiskuto kaj alternativelekto, tio verŝajne fariĝos la bazo por ampleksa geometria ĉapitro de estonta vortaro.

Tamen mi ŝatas fini per ombro de praktikado, nome per pli interesa (malfacila) problemo :

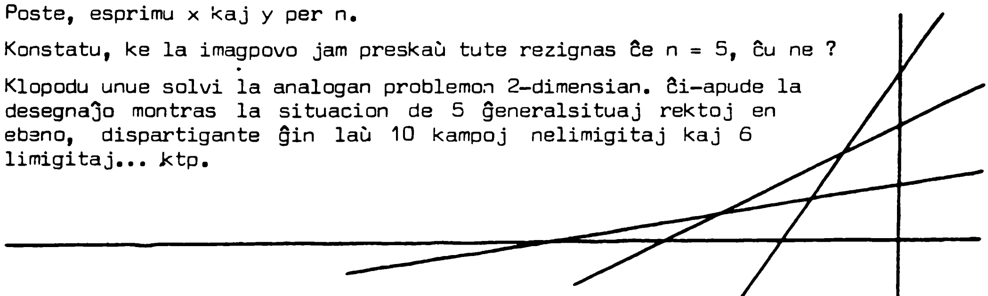
Problemo :

n ebenoj en la spaco dispartigas la spacon laŭ x nelimigitaj regionoj kaj y limigitaj regionoj. Pruvu, ke la nombroj x kaj y dependas nur de n kaj ne de la situo de la ebenoj, se tiu situo estas ĝenerala : ne ekzistas ebenparo paralela kaj ne ekzistas ebenkvaropo sampunkta, kaj ne ekzistas ebentriopo samrekta.

Poste, esprimu x kaj y per n.

Konstatu, ke la imagpovo jam preskaŭ tute rezignas ĉe n = 5, ĉu ne ?

Klopodu unue solvi la analogan problemon 2-dimensian. Ĉi-apude la desegnaĵo montras la situacion de 5 ĝeneralsituaj rektoj en ebeno, dispartigante ĝin laŭ 10 kampoj nelimigitaj kaj 6 limigitaj... ktp.



Noto de la redaktoro :
komentojn pri tiu propono de geometria terminologio bonvolu sendi al William ORR, department of mathematics, Hofstra University, Hempstead NY 11550, Usono.

aŭ al : Gerard COOL, CH - 6082 Wasserwendi, Svislando.

enkonduko en intuiciismon

Aŝvinikumar

Fine de la 19a jarcento kaj, eĉ pli, komence de ĉi tiu jarcento, ekestis akra krizo en matematiko pro apero de paradoksoj en la teorio de aroj. Simpla kaj tipa paradokso estas tiu de Russell : konsideru la aron

$$R = \{S \mid S \text{ estas aro tia, ke } S \notin S\}$$

t.e. R estu la aro de ĉiuj aroj, kiuj ne estas elementoj de si mem. Nun : ĉu $R \in R$, aŭ $R \notin R$? se $R \in R$, do R devas plenumi la kondiĉon $R \notin R$, kiun ĉiu elemento de R plenumas. Aliflanke, se $R \notin R$, do R estas aro plenumanta la difinan kondiĉon por R, do $R \in R$. ĉiukaze estas kontraŭdiro.

Ekestis akra kaj tuj plenumenda bezono doni klaran, definitivan kaj perfektan fundamenton de matematiko. Multaj proponoj kaj konsideroj venis, sed tri skoloj estas ĉefe menciindaj :

(1) la <u>logikistoj</u> (Frege, Whitehead, Russell k.a.) diris, ke logiko sola estas la bazo de matematiko - la tuta matematiko estas parto de logiko, kaj do oni povas dedukti la tutan matematikon el nura logiko. La konata trivoluma "principia mathematica" de Whitehead kaj Russell estas ĝuste klopodo fari ĉi tion. Sed poste montriĝis, ke logikismo ne sukcesas - ke ekestas gravaj netransireblaj malfacilaĵoj, kiam oni klopodas doni teorion de la reela kontinuumo surbaze de nura logiko. Logikistoj forlasis siajn esperojn kaj pli malpli transiris al la jam ekzistanta formalismo.

(2) la <u>formalisma skolo</u>, kies ĉefgvidanto estis Hilbert, estas pli malpli aksiomismo, t.e. : la ĉefa dogmo estas, ke matematiko konsistas el kolekto de aksiomaroj el kiuj oni deduktu matematikajn teoremojn pere de senbrida apliko de logiko. Oni ne bezonas ajnan pravigon por iu aksiomaro - oni devas nur doni pruvon de ĝia senkontraŭdireco, t.e. pruvon, ke la aksiomaro ne kondukos al paradokso (t.e. interna kontraŭdiro) per senlima aplikado de logiko. Atingi ĉi tiun celon la formalistoj ja tute ne sukcesis - eĉ por la plej baza aksiomaro, t.e. la aksiomaro de Zermelo-Fraenkel (aŭ la aksiomaro de Gödel-Bernays-von Neumann) por la teorio de aroj, oni ĝis nun ne sukcesis doni pruvon de senkontraŭdireco. Fakte, pro kelkaj rezultoj de Gödel, nun apenaŭ estas espero, ke oni donos pruvon de senkontraŭdireco de la aksiomaro por la teorio de aroj. Malgraŭ ĉi tiu grava manko, malgraŭ la fakto, ke la formalistoj tute ne sukcesis doni aŭ klaran aŭ definitivan aŭ perfektan (almenaŭ senkontraŭdirecan) fundamenton por matematiko, malgraŭ tio, ke ankoraŭ ne ekzistas garantio, ke paradoksoj neniam aperos, Hilbert kaj liaj disĉiploj perforte konvertis matematikon al formalismo. Nuntempe, preskaŭ ĉiuj lernolibroj estas formalismaj, la lekcioj okazas laŭ formalismo kaj oni pretendas, kvazaŭ formalisma matematiko bazita sur nepravigitaj aksiomaroj estus la nurnura konata matematiko. En ĉi tiu katalogado de aksiomaroj, pseŭdonoma grupo "N. Bourbaki" de francaj ma-

tematikistoj ludis lastatempe gravan rolon. Ĉi tiuj homoj forgesas, ke inter perfektigo de la perlingva esprimaĵo de matematiko (aŭ perfektigo de matematika lingvo) kaj perfektigo de matematiko mem nenia rilato estas videbla - povas eĉ esti, ke pro troa konfuzo, ili eĉ ne komprenas ĉi tiun fakton.

(3) antaŭsignoj de la intuiciisma vidpunkto troviĝas jam ĉe Kronecker, kaj la famaj francaj matematikistoj Poincaré kaj Borel estis gravaj antaŭirantoj de ĉi-tiu skolo. La intuiciisman skolon iniciatis kaj evoluigis la nederlanda matematikisto L.E.J. Brouwer, kaj poste H. Weyl ankaŭ aliĝis. Inter liaj disĉiploj estas aparte menciinda A. Heyting, kies libro "Intuitionism : an introduction" (North-Holland Publ. Coy.) estas rekomendata por detala studo pri intuiciisma matematiko.

La ĉefaj principoj de intuiciisma matematiko estas jenaj :

(a) la tuta matematiko estu konstruata ekde la naturaj nombroj 1, 2, 3,...

(b) por ĉi tiu konstruo, estas nepre necese, ke plua konstruo baziĝu sur tio, kio estas jam konstruita.

(c) por konstruo, oni disponas je tri bazaj konstru-eroj :

(i) el du jam konstruitaj matematikaj objektoj, oni povas formi ilian ordigitan duon (paron) ;

(ii) oni povas formi senfinen irontan sinsekvon a_1, a_2, a_3, ... de jam konstruitaj matematikaĵoj : ĉi tia sinsekvo formiĝas per elekto de a_1, sekvata de elekto de a_2, sekvata de elekto de a_3, ... , sekvata de elekto de a_{n-1}, sekvata de elekto de a_n, kaj tiel plu , kun daŭra rekono de la ebleco de plua elektado de termoj : ĝuste ĉi tiu ebleco de plua elektado konsistigas la senfinecon de la sinsekvo ;

(iii) la klasika nocio de "aro" estas anstataŭigata de la nocio de specio, t.e. matematika eco de jam konstruitaj matematikaĵoj. Ekzemple : S estu la eco (de naturaj nombroj) esti pli ol 5 ; ĉi tiu specio (t.e. eco) S estas plenumata de 6, 7, 8, ktp. ; oni skribas : $8 \in S$ (8 estas elemento de la specio S, t.e. 8 havas la econ S). Pro la kondiĉo, ke la elementoj devas esti jam konstruitaj antaŭ ol oni ekpensas pri la specio, absurdaĵoj kiel "la aro de ĉiuj aroj" aŭ "aro de ĉiuj aroj, kiuj ne estas slementoj de si mem" estas dekomence forigitaj.

(ĉ) oni rajtas aserti la ekziston de iu matematikaĵo nur se oni vere jam konstruis ĝin kaj povas montri ĝin. Ekzemple, ni konsideru la sinsekvon : a_1, a_2, ... en kiu : $a_n = 0$ se en la dècimala evoluo de π sinsekvo 0123456789 ne jam venis antaŭ la n-a cifero,
sed $a_n = 1$ se sinsekvo 0123456789 jam venis en la decimala evoluo de π antaŭ la n-a cifero.

La sinsekvo estas senfinen ironta, kaj ne-malkreskanta, plie $a_n \leq 1$ por ĉiu n. Tamen oni ne rajtas aserti, ke ĉi tiu sinsekvo estas konverĝa, ĉar oni ja ankoraŭ ne povas konstrui kaj konkrete montri la limeson, kiu estus 0 se neniu sinsekvo 0123456789 iam ajn venus en la decimalaĵo de π, sed estus 1 se ie ĉi tia sinsekvo ja venus. Manke de scio pri ekzisto de ĉi tia sinsekvo en la decimalaĵo de π, oni ne rajtas aserti konverĝecon.

(d) logiko ne estas fidinda ilo por elkovri matematikajn veraĵojn. Logiko ne povas rajtigi nin konkludi pri ekzisto de matematikaĵo, kies ekzisto ne estas konfirmita per rekta konstruo. Intuiciisma matematiko estas senlogika konstruo de matematikaĵoj pere de la tri metodoj (c) (i), (ii), (iii) komencante de naturaj nombroj.

Ni nun rigardu kelkajn prifundamentajn problemojn kaj ties trakton fare de formalismo kaj fare de intuiciismo. Nome, pri la valideco de la elekto-aksiomo de Zermelo kaj la prikontinuuma hipotezo de Cantor, Gödel pruvis en formalismo :

(F1) se la sistemo GB (t.e. la aksiomaro de Gödel-Bernays-von Neumann sen la elekto-aksiomo kaj sen la prikontinuuma hipotezo, por la teorio de aroj) estus senkontraŭdireca, ĝi restus senkontraŭdireca post aldono de la elekto-aksiomo aŭ de la prikontinuuma hipotezo.

(F1) ŝajnus argumento favora al akcepto de ĉi tiuj du principoj (aksiomoj), ĉar ili ne povus enkonduki novajn kontraŭdirojn - sed fakte la aserto (F1) ja havas nenian valoron ĝis la senkontraŭdireco de la aksiomaro GB ne estas pruvita.

Aliflanke, Cohen pruvis, ke (en formalismo) :

(F2) se la sistemo GB estus senkontraŭdireca, ĝi restus senkontraŭdireca post aldono de supozo de malvereco de la elekto-aksiomo aŭ de malvereco de la prikontinuuma hipotezo.

Por ĉi tiu pruvo, oni donis la faman Fields-medalon (samnivelan kiel la Nobel-premio) al Cohen, sed la aserto estas malplenaĵo ĝis kiam oni ankoraŭ ne pruvis la senkontraŭdirecon de la aksiomaro GB. Intertempe, konscienca matematikisto ankoraŭ havas neniun matematikan kriterion flanke de formalisma matematiko, ĉu uzi la elekto-aksiomon kaj la prikontinuuman hipotezon aŭ ne.

Aliflanke, en la konstruo de intuiciisma matematiko, uzante nur la tri metodojn (i), (ii), (iii), kaj rigore tenante sin ĉe la principoj (ĉ) kaj (d), oni donis :

(I) matematikan kontraŭekzemplon al la elekto-aksiomo, kaj matematikan kontraŭekzemplon al la prikontinuuma hipotezo. Do ekzistas klara matematika kialo en intuiciismo por konsideri la elekto-aksiomon kaj la prikontinuuman hipotezon malvalidaj.

Malgraŭ ĉi tiu supereco kaj malgraŭ tio, ke intuiciisma matematiko estas tute klara kaj perfekta konstruo, intuiciismo estas daŭre insultata kaj persekutata de senpensa formalistaro.

Aŝvinikumar,
House No. 408, Indian Institute of Technology, Kanpur - 208016, U.P., Hindujo.

6174 :
ĉu finsolvita problemo ?

François LO JACOMO

Multaj naturaj nombroj havas amuzajn proprecojn. Ekzemple, 7 estas la nura entjero n tia, ke : $\frac{1}{2}(n+1) = a^2$ kaj $\frac{1}{2}(n^2+1) = b^2$, kun a kaj b entjeraj. Mi ofte demandis min, ĉu ekzistas naturaj nombroj n, krom 4, 5 kaj 7, tiaj, ke : $n! + 1 = a^2$ (kun a entjera, kaj $n! = n.(n-1).(n-2)....3.2.1$).

Sed ĉi-tie ne temas pri 7, sed pri 6174. Ja certe, 6174 havas divizoron 7, kaj eĉ divizoron $343 = 7 \times 7 \times 7$; sed tio ne estas ĝia ĉefa propreco.

Konsideru ajnan kvar-ciferan nombron, kun tamen la kondiĉo, ke la kvar ciferoj ne estu ĉiuj egalaj.

Ekzemple : 2401.

ordigu la ciferojn de la plej granda ĝis la plej malgranda, vi havos : 4210,
ordigu poste de la plej malgranda ĝis la plej granda, tio estas : 0124,
kaj kalkulu la diferencon de tiuj du novaj kvar-ciferaj nombroj : 4086,

kaj rekomencu per tiu-ĉi lasta rezulto : 8640 - 0468 = 8172,

kaj ankoraŭ : 8721 - 1278 = 7443,

ĉiam ree : 7443 - 3447 = 3996,
9963 - 3699 = 6264,
6642 - 2466 = 4176,
7641 - 1467 = 6174,
7641 - 1467 = 6174,

Nu, ne plu utilas daŭrigi : ekde nun ni ĉiam atingos 6174. Kaj kiu ajn estu la unua nombro elektita, ĉiam oni atingas tiun saman nombron 6174. Amuze, ĉu ne ?

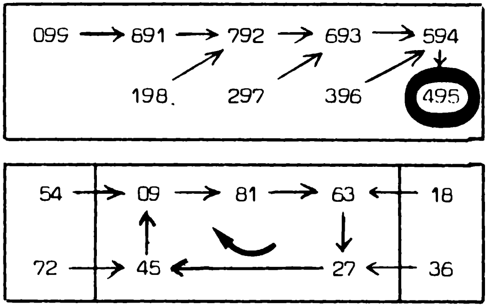
Sed... kie staras la problemo ? Ni havis ĉe la komenco difinitan stokon da nombroj, nome : 9990 nombroj. Ilin ni transformas per iu algoritmo (kiun mi nomos "algoritmo 6174"), kaj ni falas en pli malgrandan aron da nombroj, nome : post unu operacio de tiu algoritmo atingeblas nur 54 kvar-ciferaj nombroj. Post du operacioj, nur 21 el tiuj 54 nombroj atingeblas, kaj tiu aro daŭre malkreskas, ĝis... kiam nur unu nombro estos atingebla, nome : 6174.

Por bone kompreni, kio fakte okazas, bonvolu rigardi la tabelon venontpaĝe. Ni unue falas en la eksteran kvadraton, poste, sekvante la sagojn, en pli internajn (iom misformajn) kvadratojn, ĝis kiam ni atingos la centron, 6174.

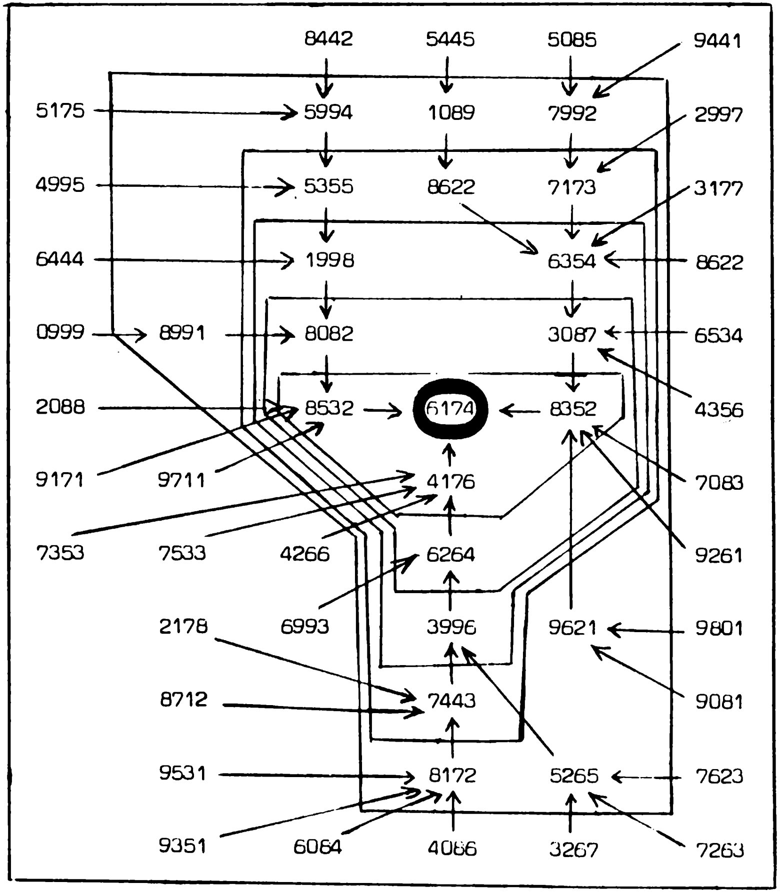
algoritmo 6174

ĉe 3-ciferaj nombroj

ĉe 2-ciferaj nombroj



ĉe 4-ciferaj nombroj



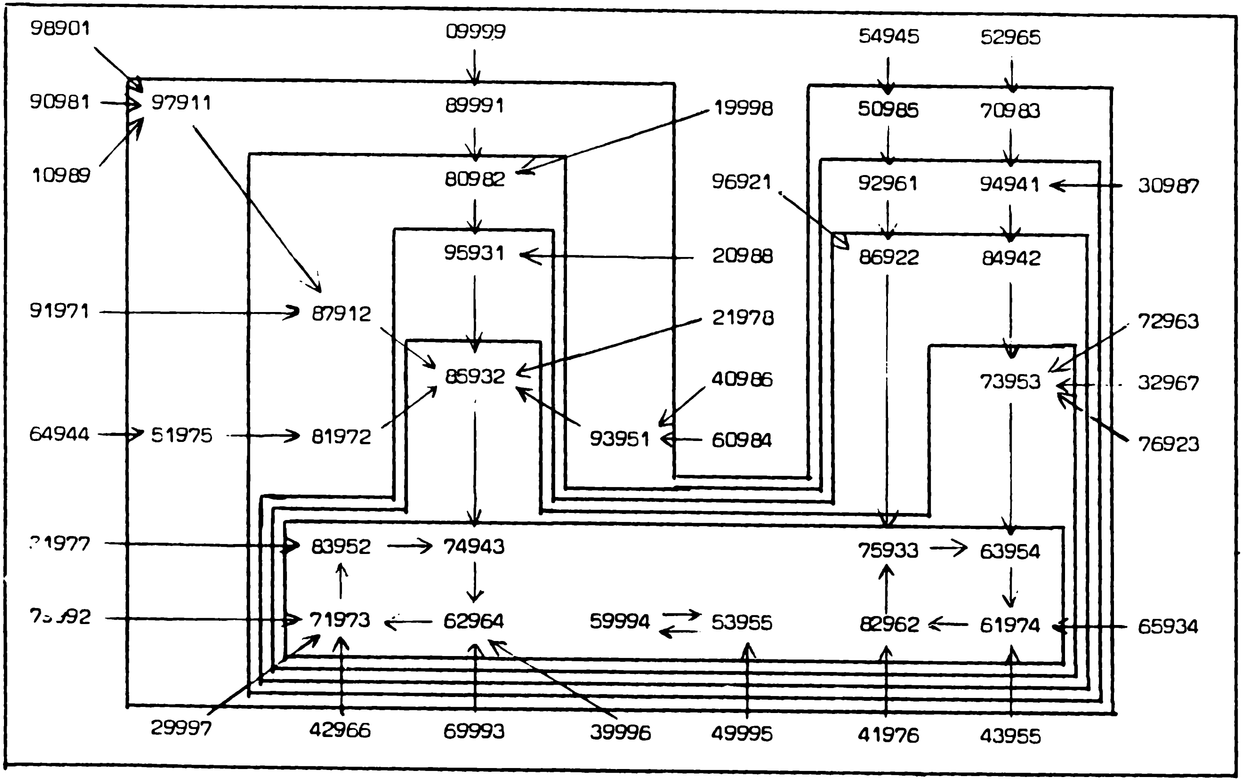
Mi daŭrigas la artikolon tajpante tiudirekte, ĉar estas pli facile por enpaĝigi la diversajn tabelojn.

Diversaj, ja, ĉar estas eble ĝeneraligi tiun algoritmon 6174 al 2-, 3-, 5-, ... n-ciferaj nombroj. Ĉe 3-ciferaj nombroj, ni ankaŭ atingas nepre ununuran nombron, nome 495. Sed ĉe 2-ciferaj nombroj, ni atingas ciklon : 09 → 81 → 63 → 27 → 45 → 09 → ... kaj ĉe 5-ciferaj nombroj, ni atingas unu el tri eblaj cikloj. Kaj poste ?...

Jen la problemo, ankoraŭ ne finsolvita, kiun mi aludis en la titolo : ĉu ekzistas aliaj nombroj, kiel 6174 kaj 495, kiuj restas senŝanĝaj post unu operacio de tiu algoritmo ? kaj ĉu, por iu n krom 3 kaj 4, ĉiuj n-ciferaj nombroj nepre atingas, per tiu algoritmo 6174, unu nuran nombron ? Jen du malsamaj problemoj, ankoraŭ ne solvitaj...

François Lo Jacomo, 14 rue de la Pompe,
F - 75016 Paris, Francujo.

algoritmo 6174 ĉe kvin-ciferaj nombroj



probabloj pri entjeraj kaj naturaj nombroj

Gerard COOL

Mi volas trovi kaj pruvi jenajn kvin probablojn. Nome la probablon, ke :

1 - la ekvacio ax = b havas naturan solvon, do la frakcivaloro b/a estas natura nombro,

2 - a kaj b estas divizor-fremdaj, do havas la makodivon 1,

3 - a kaj b kaj c estas divizorfremdaj, do havas la makodivon 1.

4 - ax + by = c prezentas rekton tra "retpunktoj", do la ekvacio havas solvojn el Z x Z.

5 - ax + by + cz = d prezentas ebenon tra "retpunktoj".

Ĉie a, b, c, d, prezentas naturajn nombrojn, kiujn oni ĉerpas ludante per "ludĵetiloj" (regulaj pluredroj) kun n edroj. n povas esti 2 (monero), 4, 6 (la ĵetkubo), 8, 12, 20 kaj nefinio. Tiel do a, b, c, d, prezentas la rezultojn de unua, dua, tria, kvara ĵeto per ludĵetilo, kiu ĉiuĵete hazarde (egalprobable) produktas iun naturan nombron de 1 ĝis inkluzive n. n = nefinio prezentas la kernproblemojn, la kazojn, en kiuj ĉiu natura nombro estas same probabla kiel ĉiu alia natura nombro.

La probablojn de supraj kvin problemoj por la diversaj n-valoroj mi nomas respektive : $Pr(n)$, $Pr_2(n)$, $Pr_3(n)$, $PR_2(n)$, $PR_3(n)$.

1

Ĝenerale por n : kun la denominatoro 1 estas n frakcioj natur(valor)aj, kun la denominatoro 2 ne estas nepre n/2, sed E(n/2) tiaj frakcioj, ktp. Entute do : $f(n) = n + E(n/2) + E(n/3) + \ldots + E(n/n)$. (rigardu form. 1).

formuloj

vidu liston de "signoj, simboloj, signifoj" p. 39

Form. 1 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} E(n/k)$ $\sum_{k=1}^{n} f_2(E(n/k) = n^2$ kaj simile por f_3 ;

Per tiu formulo oni povas komputi $f_2(n)$ el f_2 de antaŭaj n.

Form. 2 $F_2(n) = \sum_{k=1}^{n} E(n/k) \,.\, f_2(E(n/k))$, kaj simila formulo por $F_3(n)$.

Form. 3 $S_2.P_2 = S_3.P_3 = S_4.P_4 = \ldots$ ktp $= 1$

Form. 4 Anstataŭ Pr(nefinio) aŭ $Pr(\infty)$, mi skribas simple Pr. $Pr = 0$.

$Pr_2 = P_2 = 1/S_2$ kaj tio, laŭ Leonard Euler, egal $6/\pi^2 \simeq 0{,}607927\ldots$

$Pr_3 = P_3 = 1/S_3$, milonaproksime (probable !) 0,832 ($S_3 \simeq 1{,}202\ldots$).

$PR_2 = P_2.S_3 = S_3/S_2$, aproksime 0,731, kaj $PR_3 = S_4/S_3 \simeq 0{,}900$.

Por n = 6, f(6) = 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14. Rigardu la tabelon ĉe kolono f(n).

Do : $f(n) < n.(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + ...)$

$< n.(1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + ...)$

$< n. {}^2\log(n+1)$ (logaritmo de (n+1) je bazo 2)

$Pr(n) = n^{-2}. f(n) < 1/n . {}^2\log(n+1)$, kaj ties limeso por n (strebanta) al nefinio estas = 0.

2

$f_2(n)$ estu la nombro da tiaj ordaj duopoj (a,b) el n^2 kun la makodivo 1. (makodivo = maksimuma komuna divizoro).

Kion signifas la eldiro, ke ma(a,b) = m (ke m estas la makodivo de a kaj b) ? Nu, ne nur ke a estas m-oblo kaj b estas ankaŭ m-oblo, sed krome, ke la frakcivaloroj a/m kaj b/m (kiuj do estas naturaj nombroj) havas la makodivon 1.

Observu ekzemplon n = 6. Kiom el la 36 ordaj paroj (a,b) havas la makodivon 6 ? Nu, nur la paro (6, 6). Same makodivon 5 havas nur la paro (5,5), kaj same makodivon 4 havas nur la paro (4,4). La ordajn parojn kun makodivo 3 ni trovas inter la ordaj paroj : (3,3), (3,6), (6,3), (6,6). Nur la unuaj tri havas la makodivon 3, ĝuste kiel inter la ordaj paroj (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), nur la unuaj tri havas la makodivon 1. Do la nombro 3 estas precize $f_2(2)$. Simile oni vidas, ke estas $f_2(3)$ ordaj paroj kun makodivo 2. Kaj $f_2(6)$ kun makodivo 1. Entute do estas : $f_2(1) + f_2(1) + f_2(1) + f_2(2) + f_2(3) + f_2(6) = 36$ ordaj paroj. Kaj la nombroj interkrampaj : 1, 1, 1, 2, 3, 6, estas ĝuste E(6/6), E(6/5), E(6/4), E(6/3), E(6/2), E(6/1). Tiel klariĝas la ĝenerala formulo pri $f_2(E(n/k))$. (form. 1).

Kaj el la tuj videblaj etaj nombroj $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$, oni trovas per rekurentaj rilatoj la $f_2(n)$-valorojn por ĉiam pligrandaj n. Tial la tabelo

tabelo

	f-nombroj					probabloj				
n	f(n)	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$F_2(n)$	$F_3(n)$	Pr(n)	$Pr_2(n)$	$Pr_3(n)$	$PR_2(n)$	$PR_3(n)$
2	3	3	7	7	15	0,7500	0,7500	0,8750	0,8750	0,9375
3	5	7	25	23	77					
4	8	11	55	52	236	,5000	,6875	,859	,8125	,922
5	10	19	115	104	592					
6	14	23	181	168	1179	,389	,639	,838	,778	,909
8	20	43	439	404	3764	,3125	,672	,857	,789	,919
10	27	63	841	763	9093					
12	35	91	1447	1313	18779	,243	,632	,837	,760	,906
20	66	255	6745	6062	145332	,165	,6375	,843	,758	,908
120	602	8771		1266586		,042	,609		,733	
∞			$\longrightarrow$			0,0000	0,608	0,832	0,731	0,900

La 4-ciferaj probabloj estas ekzaktaj, la 3-ciferaj estas milone aproksimigitaj.

kun la f- kaj F-nombroj havas pli da n-valoroj ol nur 2, 4, 6, 8, 12, 20. La ceteraj servas por helpi komputi la f- kaj F-valorojn de la originaj n-valoroj.

Nu, kio pri n = nefinio ?

Du ajnaj naturaj nombroj a kaj b havas aŭ makodivon 1 aŭ makodivon 2 aŭ makodivon 3 aŭ ... ktp.; a kaj b havas la makodivon m signifas, ke a estas m-oblo (probablo 1/m) kaj ke b estas m-oblo (probablo 1/m), kaj ke a/m kaj b/m havas la makodivon 1. Tiun lastan probablon mi nomas Pr_2(nefinio). Ĉar la tri postuloj estas sendependaj unu de la alia, aplikiĝas ĉi-tie la produt-regulo. Do la probablo pri makodivo m egal : 1/m . 1/m . Pr_2(nefinio).

La probablo, ke ma(a,b) estas ĉu 1 ĉu 2 ĉu 3 ĉu 4 ĉu ... do estas egala je $S_2.Pr_2$(nefinio). Ĉar temas pri certeco, do Pr_2(nefinio) = $1/S_2$. (S_2 estas la sumo de ĉiuj $1/k^2$, por k entjero ; vidu "signoj, simboloj, signifoj").

Sed ekzistas ankoraŭ tute alia rezonado por trovi Pr_2(nefinio). Nome : ma(a,b) = 1 estas ekvivalenta kun : a kaj b ne estas ambaŭ 2-obloj, kaj ne estas ambaŭ 3-obloj, kaj ne estas ambaŭ 5-obloj, kaj ne estas ambaŭ 7-obloj, kaj ne estas ambaŭ 11-obloj, kaj ne estas ambaŭ 13-obloj, kaj... tiel plu...
La probablo, ke a kaj b ne estas ambaŭ 2-obloj, estas : $1-(1/2)(1/2)$,
kaj tiu, ke a kaj b ne estas ambaŭ 3-obloj, estas : $1-(1/3)(1/3)$.
Nur stariĝas la demando, ĉu a kaj b, jam plenumantaj la kondiĉon, ke ili estas ne ambaŭ 2-obloj, havas la saman probablon, ke ili estas ne ambaŭ 3-obloj. Nu tiel estas, ĉar la 3-obloj distribuiĝas same (homogene) inter la jes-2-obloj kiel inter la ne-2-obloj. Kaj ĝenerale ; la aro de la obloj de ajna primnombro distribuiĝas homogene inter la ne-p-obloj kaj la jes-p-obloj (p estas ĉi-tie iu ajn alia primnombro ol la supre celita primnombro).

Tiel do oni trovas, ke aplikiĝas la produt-regulo, tiel, ke : $Pr_2 = (1-2^{-2}).(1-3^{-2}).(1-5^{-2})\ldots$ ktp, do $= P_2$ (rigardu la formulon 4). Tiel do estas pruvite, ke la limessumo S_2 (aŭ pli ĝuste la sumlimeso... ?) kaj la limesproduto P_2 havas la produton 1. Fakte tiel ankaŭ pruviĝas la limeseco de P_2, ĉar ja la limeseco de S_2 estas simple pruvebla.

3

Oni notu, ke ekzemple (10, 12, 15) estas triopo divizorfremda, kvankam la paroj (10,12), (12,15), kaj (10,15) ĉiuj tri havas aliajn makodivojn ol 1. Sed la 3-opo kiel 3-opo havas neniun alian makodivon ol 1.

La nocioj kaj rezonadoj estas plej similaj. Tiel ankaŭ la formuloj kaj komput-manieroj.

Komentoj al la Rezultoj 2 kaj 3

* 1 * Mi miras pri la pruvebleco de la formulo $P_2.S_2$ = (pli ĝenerale) $P_m.S_m = 1$. Mi nome ne konas rektan pruvon, kaj tia rekta pruvo ŝajnas al mi (tre ?) komplika (kiu konas tian pruvon ?)*. Dum tiel relative simpla estas la pruvo, se oni interpretas ambaŭ esprimojn per probabloj ! aŭ ĉu tiu simpleco sukcesis je la kosto de pruv-rigoreco ?

---

* Noto de la redaktoro : eble vi konos tiun pruvon, se vi legos la sekvantan artikolon pri la nombroj de Bernouilli (ekde paĝo 55). Tie vi trovos multajn

signoj * simboloj * signifoj

Si. 1 a, b, c, d estas naturaj nombroj, per egalaj probabloj ĉerpeblaj el po $\{1, 2, 3, 4, \ldots n\}$.

Si. 2 ma(a,b,(c)) = la makodivo de a, b (kaj c),
makodivo = maksimuma komuna divizoro,
divizorfremdaj mi nomas a, b (kaj c) se ma(a,b,(c)) = 1.

Si. 3 E(n/k) = la nombro de la entjeroj entenataj en la frakcivaloro n/k.

Si. 4 f(n) estas la nombro da frakcioj b/a kun entjera (do natura) valoro,
$f_2(n)$ estas la nombro da divizorfremdaj paroj (a,b) el la n^2 eblaj,
$f_3(n)$ simile ...triopoj (a,b,c) el la n^3 eblaj,
$F_2(n)$ = la nombro da triopoj (a,b,c) en kiuj c estas oblo de ma(a,b),
$F_3(n)$ simile ...kvaropoj (a,b,c,d) ...d estas oblo de ma(a,b,c),
ĉio-ĉi depende de n.

Si. 5 Pr(n) = la probablo, ke b/a havas naturan frakci-valoron $= n^{-2}.f(n)$,
$Pr_2(n)$ = la probablo, ke ma(a,b) = 1 $= n^{-2}.f_2(n)$,
$Pr_3(n)$ = la probablo, ke ma(a,b,c) = 1 $= n^{-3}.f_3(n)$,
$PR_2(n)$ = la probablo, ke c estas oblo de ma(a,b) $= n^{-3}.F_2(n)$,
$PR_3(n)$ = la probablo, ke d estas oblo de ma(a,b,c) $= n^{-4}.F_3(n)$.

Si. 6 Entjera solvo (x,y,z) estas solvo, en kiuj ĉiuj tiuj koordinatoj estas entjeraj. Retpunkto estas punkto reprezentata de entjera solvo.

Si. 7 $S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ S_3 tute simile, kun -3 anstataŭ -2, kaj tiel S_4.

Si. 8 p_1, p_2, p_3, p_4 ... estas la vico de la primnombroj : 2, 3, 5, 7, ...

Si. 9 $P_2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-2})$ kaj simile P_3, P_4, ktp......

---

* 2 * Fakte mi ankaŭ miras, ke tiel simpla demando pri la probablo, ke du ajnaj naturaj nombroj estas divizorfremdaj, havas entute difinitan respondon, kaj eĉ nek = 0, nek = 1. Speciale kurioze estas, en tiu-ĉi kazo m = 2, la apero de π... kiun fakton mi mem ja ne povas pruvi, ke konante la pruvon de la Eŭlera formulo.

* 3 * Rigardu en la tabelo pri probabloj (p. 37) la alproksimiĝon al la limesoj Pr_2 kaj Pr_3(nefinio). Por kreskanta n, la probabloj grandtrajte falas kaj tiel strebas al la limeso. Sed tamen kun strangaj ne-regulaĵoj. Mi konjektas, ke ne nur la grandeco de n, sed ankaŭ ĝia "beldivideblo" influas la proksimecon de Pr(n) al la koncerna limeso. Se mi ĝuste kalkulis (longe kaj pene), $f_2(120) = 8771$, kaj do $Pr_2(120) = 0{,}609\ldots$, do nur 0,001 pli ol la limeso !

4

ax + by = c prezentas rekton. Kiam ĝi iras tra retpunktoj, do kiam la ekvacio havas solvojn entjerajn (kun entjeraj x kaj y) ?

---

detalojn pri tiuj sumoj S_n, tiuj produtoj P_n, la funkcio dzeta plej ĝenerale, kaj eĉ la valoro de S_3 kun 30 decimaloj kaj la maniero kalkuli ĝin sen komputoro !

Facile montriĝas jenaj faktoj :

1 - Se (x_0,y_0) estas solvo, tiam ankaŭ $(x_0 + bk, y_0 - ak)$. Do : se unu retpunkto, tiam nefinio da ili.

2 - Se $ma(a,b) \neq 1$ kaj c estas ne oblo de tiu ma(a,b), ne povas ekzisti entjeraj solvoj.

Sed kio, se c estas jes oblo de ma(a,b) ? Nu, tiam eblas dividi la ekvacion per ma(a,b), tiel ke rezultas ekvivalenta ekvacio kun denove entjeroj a, b kaj c, sed nun kun ma(a,b) = 1.

Esplorendas do tiu kazo, en kiu ma(a,b) = 1. La esploron mi faras ĉi-tie ne vaste kaj ne ĝenerale, sed per la ekzemplo (8,9,5), do $8x + 9y = 5$, ekvivalenta kun $9y = 5 - 8x$. Substituante por x : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kaj 8, mi certe akiros ĉiujn 9 diversajn valorojn (mod 9), ĝuste pro la divizorfremdeco de 8 kaj 9. Unu el la 9 mod-valoroj, kiujn alprenos la dekstra flanko de la ekvacio, do devas esti 0 (en la ekzemplo : por x = 4). Tiam do ekzistas ankaŭ entjera y (ĉi-tie y = -3). La retpunktoj ĝenerale de ĉi ekvacio estas : $(4-9k, -3+8k)$, por ĉiu entjero k.

Estas klare nun, kiel oni ĝenerale pruvas, ke jenaj eldiroj estas ekvivalentaj :

1 : $ax + by = c$ iras tra retpunktoj
2 : c estas oblo de ma(a,b)

Kaj kiel estas kalkulebla tiu-ĉi probablo ? Mi montras la kalkulon, kiom da tiaj ordaj triopoj ekzistas por n = 6 (do : $F_2(6)$) :

ekzistas unu paro (a,b) kun ma = 6, nome : (6,6). Kaj ekzistas unu c, kiu estas oblo de 6, nome 6. Kun makodivo 6 do ekzistas $1 \times 1 = 1$ triopo, nome : (6,6,6). Same por makodivo 5 kaj makodivo 4. Kun makodivo 3 ekzistas ne 4, sed nur 3 paroj (a,b), nome precize $f_2(2)$: (3,3), (3,6), (6,3). En ĉiuj tiuj kazoj c povas esti 3 aŭ 6. Kun makodivo 3 do ekzistas : 3×2, nome : $f_2(2) \times 2$ triopoj, ktp... Entute do : $(1\times1)+(1\times1)+(1\times1)+(3\times2)+(7\times3)+(23\times6)$ aŭ strukture : $F_2(6) = f_2(E(6/6)).\ E(6/6) + f_2(E(6/5)).E(6/5) + \ldots + f_2(E(6/1)).E(6/1) = 168$ Simile oni kalkulas la ceterajn $F_2(n)$. Rigardu la ĝeneralan formulon kaj la tabelon pri la f- kaj F-nombroj.

La probabloj estas komprenεble $F_2(n).n^{-3}$. Rigardu la tabelon pri la probabloj.

Kiel kalkuli PR_2(nefinio) ? Nu, la probablo, ke ma(a,b) = k kaj ke c estas k-oblo estas : $[(1/k).(1/k).Pr_2(\text{nefinio})].(1/k)$. La probablo, ke tio validas por ajna k do estas = $Pr_2(\text{nefinio}).(1 + 2^{-3} + 3^{-3} + 4^{-3} + \ldots)$ do = $Pr_2(\text{nefinio}).S_3 = P_2.S_3 = S_3/S_2$, proksimume : 0,731.

5

La kalkulmaniero por $F_3(n)$ kaj por $PR_3(n)$ kaj PR_3(nefinio) estas plej simila. Nur estas multe pli komplika la pruvo, ke nun same ekvivalentas la du eldiroj :

1 : $ax + by + cz = d$ prezentas ebenon tra retpunktoj,
kaj : 2 : d estas oblo de ma(a,b).

Por detale pruvi oni devas distingi kelkajn kazojn. Pluraj (a,b,c)-triopoj kun makodivo 1 ebligas simplan pruvon. Mi montras ĉi tie nur la skizon de pruvo pri iu nefavora (a,b,c)-triopo :

$15x + 18y + 20z = 7$ ekvivalentas kun : $15x + 18y = 7 - 20z$. Nun oni povas pruvi sammaniere kiel antaŭe, ke ekzistas entjera z, kiu igas la dekstran flankon trioblo (ĉi tie : $z = 2 + 3k$). Poste la ekvacio estas dividebla per 3 kaj transformiĝas al : $5x + 6y = -(11+k)$. Kaj do por ĉiu k ekzistas nefinio da (x,y)-paroj entjeraj laŭ la antaŭa pruveto. Unu el la retpunktoj estas (-1, -1, +2). Rigardu la probablo-tabelon kaj notu, kiel subite granda estas PR_3(nefinio) !

Ĝeneraligo

Ne estas malfacile pliampleksigi la probablojn al pli da dimensioj. Sed atendas tute aliaj demandoj multe pli problemaj, el kiuj mi menciu unu :

kiom estas la probablo, ke la rekto, reprezentita per la ekvaci-sistemo : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = f \end{cases}$ iras tra retpunktoj, se ĉiuj 8 koeficientoj estas naturaj nombroj, ĉerpeblaj egalprobable el $\{1,2,3,\dots n\}$?

Necesa kondiĉo estas, ke ambaŭ ebenoj iru tra retpunktoj. Necesa, sed... ne sufiĉa kondiĉo ! ekzemple la koeficiento-8-opo : $\begin{cases} 1, & 1, & 3, & 2 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{cases}$ prezentas du tra-retpunkt-irantajn ebenojn, kies sekcpunktoj bedaŭrinde ĉiuj situas en la ebeno $z = \frac{1}{2}$!

Verŝajne la esploro kondukos foje al jena demando : kiom estas la probablo, ke determinanto, kies elementoj estas naturaj nombroj supre priskribitaj, havas la valoron 0 ?

Kaj kiu volas entrepreni tiun esploron ? Ne mi, nun...

KONKLUDO

Tiu-ĉi problemaro iam alsaltis min, kaj mi mem ellaboris ĝin. Sed ĉar ĝi fakte estas relative elementa, mi malfacile kredus, ke ĝi en iu formo ne jam estas konata. Mi volas nun fini la artikolon per kelkaj demandoj al la legantoj :

• 1 : Kiu jam renkontis la problemaron ? Kiu povas indiki al mi, kie kaj en kiu kadro ?

• 2 : Mi ŝatus ricevi kritikon pri la traktado kaj pruvmaniero. Pruvrigoron mi ne intencis. Sed eble iu trovas la pruvojn aŭ pruvindikojn tro supraĵaj ?

• 3 : Mi trovis ie, ke Euler pruvis, ke $S_2 = \pi^2/6$. Ne ĉeestis la pruvo. Kiu konas ĝin ? Kaj, se ĝi estus relative simpla, povus montri ĝin al mi ?

• 4 : La limesojn de S_3 kaj S_4 mi klopodis aproksimi per nepotenca elektrona kalkulilo, same kiel tri f-nombroj pri $n = 120$. Ĉu iu, kun pli potenca kalkulilo, povas konfirmi miajn rezultojn aŭ malkonfirmi kaj korekti ilin ?

• 5 : Se la nur menciita problemo pri la du ebenoj estus tamen ne-jam-traktita, ĉu iu el vi sentus sin altirita por ĝin ataki ?

★

Problemoj Lingvaj aŭ Matematikaj ?

Priskribo	Nomo	mallongiga prononc-elemento
natura nombro	ano	ano
aro de n malsamaj anoj, prefere laŭgrande ordigitaj	n-opo (2,3,4-opo)	nopo (2,3-opo)
n-opo kun makodivo 1	divizorfremda	dif
divizorfremda n-opo, kies ĉiu an-paro estas ankaŭ divizorfremda ($n \geqslant 3$)	divizorfremdega	difreg
divizorfremda n-opo, kies ĉiu (n - 1)-opo estas ne-divizorfremda, do havas makodivon > 1 ($n \geqslant 3$).	divizorfremdeta	difret
n-opo, kies ĉiuj anoj estas divideblaj	dividebla	di
n-opo, vicigebla laŭ diferenco 1 (ekz : 8,9,10,11)	sinsekva	sin
n-opo, vicigebla laŭ diferenco 2 (ekz : 8, 10, 12)	apuda	apu
n-opo, kies ĉiuj anoj havas m ciferojn	m-cifera (1,2-cif.)	meci (1,2-ci)
plej granda, maksimuma (maksimuma n-opo estas n-opo kun maksimuma sumo)	maksa	ma
plej malgranda, malplej granda, minimuma (minimuma n-opo = n-opo kun minimuma sumo)	minima	mi

n-opo kun pluraj supraj adjektivoj estas kunmetitaj per la mallongigaj prononc-elementoj de la dekstra kolono, laŭ la ordo de sube supren.

Ekzemplo 1 : ⟶ "duciapudidifregtriopo" = du ci - apu - di - difreg - tri opo = du-cifera apuda dividebla divizorfremdega triopo,

Ekzemplo 2 : ⟶ "midifretnopano" = mi - difret - n op - ano = la plej malgranda nombro, kiu povas esti ano de divizorfremdeta n-opo ;

Demandoj

1 - trovu la midifretnopanon (vidu ekzemplon 2).

2 - pruvu, ke ĉiu difretnopo estas ankaŭ didifretnopo, do ke la lasta vorto estas / pleonasmo

3 - trovu la maducidifrettriopon kaj la mitricidifretkvaropon.

4 - mecidifretnopo, ekde certa n, havas m > n. Pruvu tion kaj trovu ekde kiu n.

5 - pruvu, ke nek sinnopo, nek apunopo povas esti difreta.

6 - trovu la misindidifregnopon.

7 - ĉu ekzistas duciapudidifregtriopo (vidu ekzemplon 1) ?

8 - kiujn valorojn povas havi n en sindidifregnopo ? kaj en apudidifregnopo ?

9 - pruvu, ke ekzistas nefinio da apudidifregnopoj kun maksa n.

10 - ĉu vi trovas la miapudidifregnopon kun maksa n ?

Respondoj

0~1~2 Ano de difreĝnopo devas konsisti el primfaktoroj, kiuj aperas en neniu alia ano. Primaro do estus ekzemplo de ia difregnopo. Kaj 2^4, 3^3, 5^2, 7^2 estas ekzemplo de didifregnopo, pli precize ĝi estas ducididifregkvaropo (kaj estas pruveble, ke ne ekzistas ducididifreg 5 aŭ 6 aŭ 7 ...opo).

La anoj de difretnopo kontraŭe povas havi jenan strukturon : pqr, pqs, prs, qrs, en kiu p, q, r, s estas primfaktoroj, aŭ pli ĝenerale anoj de difreĝnopo. Ĉar en tia nopo n $\geqslant$ 3, do ĉiuj difretnopanoj devas havi almenaŭ du malsamajn primfaktorojn, do devas esti divideblaj, tiel ke ja ĉiu difretnopo estas dividebla. Tiel jam estas respondita demando 2. La minima ano kun du malsamaj primfaktoroj estas 2 x 3 = 6. Jen la respondo al la demando 1.

3 La minima ducifera divizorfremdeta triopo estas 10, 12, 15 (ne demandite). La maksa ducifera divizorfremdeta triopo estas 88, 96, 99. La minima tricifera divizorfremdeta kvaropo estas $\begin{cases} 105 = 3 \times 7 \times 7, & 120 = 8 \times 3 \times 5, \\ 126 = 2 \times 9 \times 7, & 140 = 4 \times 5 \times 7. \end{cases}$ Oni trovas tian pluropon, kolektante kiel eble plej malgrandajn anojn $\geqslant$100 kun tri malsamaj primfaktoroj.

4

$3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 = 3\,234\,846\,615$ (10-cifera).
$3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 = 100\,280\,245\,065$ (12-cifera).

do : (la produto de la unuaj 10 primnombroj) : 2 = nombro 10-cifera ,
(la produto de la unuaj 11 primnombroj) : 2 = nombro 12-cifera .

Ekzistas do difretdekopo dekcifera, nome la 10-primproduto : 2 x 3 x 5 x ... x 29 dividita per respektive 2, 3, 5, ... 29, ĉe kiuj la malpli grandaj kvocientoj ekzemple ne nur havu la faktoron 2, sed la duan aŭ trian aŭ kvaran potencon de 2, por ke ankaŭ ili fariĝu 10-ciferaj.

Aliflanke, la plej granda kvociento de la 11-primproduto (do : ĝi / 2) ne plu estas 11-cifera, sed 12-cifera. Ne ekzistas do difret 11 opo 11 cifera, sed nur difret 11 opo 12 cifera aŭ pli-ol-12-cifera. Por ĉiu n > 11 eĉ pli certe, m povas esti nur > n.

La pruvenda kaj nun pruvita eco do validas ekde n = 11.

5 La diferenco de du anoj nepre estas oblo de la makodivo de tiuj anoj. Se do la anoj a kaj b havas la diferencon 1, do ma(a,b) ankaŭ devas esti 1, do a kaj b divizorfremdaj. Tial sinsekva n-opo ne povas esti divizorfremdeta (por n 3).

Apuda divizorfremda n-opo ne povas havi paran anon, alie ĉiuj anoj estus paraj kaj do la n-opo havus la makodivon 2, do ne estus divizorfremda. Apuda divizorfremda n-opo povas do havi nur neparajn anojn. Nun la diferenco de du apudaj anoj estas 2, do ilia makodivo povas esti nur 1 aŭ 2, kaj 2 ĝi ne povas esti, ĉar ĉiuj anoj estas neparaj. Do tial ekzistas nek sinsekva, nek apuda difretnopo.

8 Jes ekzistas sinsekva kaj apuda difreĝnopoj. Sed ekzistas nur sinsekva difreg 3 opo ; kaj en ĝi la meza ano devas esti para. Sinsekva pli-ol-3-opo nepre havus almenaŭ du parajn anojn. Tia n-opo do ne plu povas esti difrega. En sindifregnopo, n do povas havi nur la valoron 3.

El tri apudaj neparaj anoj precize unu estas 3-oblo. Tial do apuda (nepara)

6-opo havas du trioblojn, ktp. Tial ne ekzistas apuda difreg(pli-ol-5)opo.

En postaj respondoj estos ekzemploj de n = 3, 4 kaj 5. Tiuj estas do la valoroj, kiujn povas havi n en apuda divizorfremdega n-opo.

6 25, 26, 27 estas la plej malgranda sinsekva dividebla divizorfremdega n-opo.

7 Jes ekzistas precize unu tia : 91, 93, 95. Kaj la minima apuda dividebla divizorfremdega 4-opo estas : 115, 117, 119, 121 (ne demandita). Alia tia, tuj najbara, estas : 119, 121, 123, 125. Ili ne estas kombinevlaj, ĉar tiam la kvinopo enhavus la du trioblojn 117 kaj 123, do ne estus divizorfremdega.

9 Pruvende estas do, ke ekzistas nefinio da apudaj divizorfremdegaj 5-opoj : 30 030 = 2 x 3 x 5 x 7 x 11 x 13. Nu, 30 030 - 5, 7, 9, 11, 13, kaj ankaŭ : + 5, 7, 9, 11, 13 estas tiaj 5-opoj. Pruvo :

Tuj estas videble, ke temas pri apudaj 5-opoj. Ankaŭ, ke la 5 anoj estas divideblaj, nome obloj de respektive 5, 7, 3, 11 kaj 13. Pruvenda estas nun ankoraŭ la divizorfremdegeco : la diferencoj estas 2, 4, 6 kaj 8. Du el la kvin anoj povus do havi nur la makodivon 1 aŭ 2 aŭ 4 aŭ 8 aŭ 3 aŭ 6. 2, 4 kaj 8 ne eblas, ĉar ĉiuj anoj estas neparaj. 3 kaj 6 ne eblas, ĉar la meza estas 3-oblo, kaj do la ceteraj kvar nepre ne. Restas do la sola eblo, ke la makodivo de ĉiu anparo estas 1.

La saman pruvon oni facile konstruas por ajna esprimo 30 030 . p ± 5, 7, 9, 11, 13, en kiu p estas iu natura nombro. Ekzistas do nefinio da tiaj 5-opoj.

10 El la supra konsidero ne sekvas inverse, ke ĉiu tia kvinopo devas havi la strukturon 30 030 . p ± 5, 7, 9, 11, 13. Necesa estas nur, ke la meza ano estu trioblo. Sed la ceteraj 4 anoj ne nepre devas esti obloj de 5, 7, 11 kaj 13.

Nu, jen la minima tia kvinopo, do la miapudidifregkvinopo

Sed mi nur sukcesis trovi ĝin, disponante pri tabelo ĝis 1 000 kun ĉiuj primnombroj !

527	=	17 x 31
529	=	23 x 23
531	=	3^2 x 59
533	=	13 x 41
535	=	5 x 107

*

Gerard COOL, CH - 6082 Wasserwendi, Svislando.

la nombroj de Bernouilli

François LO JACOMO

Per tiu-ĉi artikolo mi celas ne nur difini la nombrojn de Bernouilli kaj klarigi ties utilon, sed ankaŭ memorigi multajn fundamentajn kaj bezonatajn rezultojn de kompleksa analitiko, tiel ke la artikolo estu alirebla de ne-spertuloj, kaj krome aludi kelkajn tiurilatajn terminologiajn problemojn. Do mi petas ĉiujn, kiuj havos komentojn koncerne la terminojn uzatajn en tiu-ĉi artikolo, ke ili bonvolu skribi al mi por konigi sian opinion.

Sed unue, mi rapide prezentu la kernon de la artikolo, nome : la nombroj de Bernouilli.

Verŝajne vi jam scias, ke : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

kaj eble ankaŭ, ke : $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

sed pli ĝenerale : $1 + 2^k + 3^k + \dots + n^k = ?$

Vi eble jam konas la formulojn : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

sed ĉu vi konas analogajn formulojn por : $\mathrm{tg}\, x = ?$ $\mathrm{cotg}\, x = ?$

Vi eble jam aŭdis, ke : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

eble eĉ ankaŭ, ke : $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$

sed ĉu vi aŭdis, ke ekzistas tia ĝenerala formulo ?

Ĉu vi iam imagis, ke por solvi tiujn tri problemojn, sufiĉas difini unu vicon da nombroj : la nombroj de Bernouilli ?

Tiun vicon oni ĝenerale difinas tiel :

$$* \quad \boxed{\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}} \quad *$$

(kie B_n estas do la n-a nombro de Bernouilli).

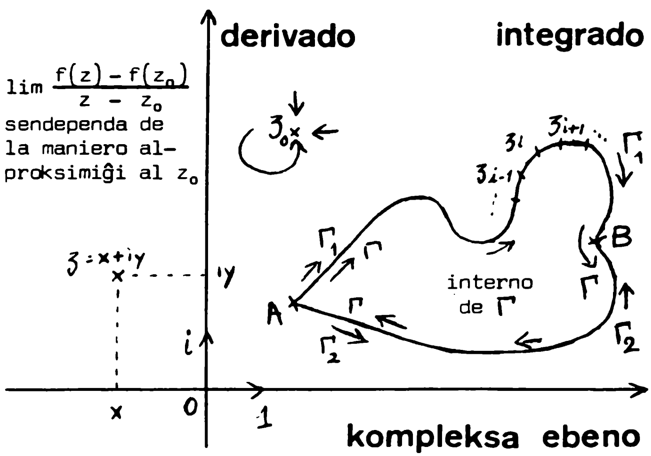
Sed por utiligi tian formulon kaj atingi interalie la tri rezultojn ĉi-supre anoncitajn, necesas fari plurajn interesajn demonstraĵojn, kiuj postulas konojn pri kompleksa analitiko. Do mia unua celo estos memorigi rapide la plej fundamentajn teoremojn koncerne holomorfajn funkciojn.

*

* *

Holomorfa funkcio estas funkcio de C (aro de la kompleksaj nombroj) al C, derivebla, tutsimple. Tio signifas, ke $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ havas limon $f'(z_0)$ kiam $z \to z_0$ sendepende de la maniero, kiel z alproksimiĝas al z_0. Ekzemple : $f(z) = z^2$ estas holomorfa, ĉar : $\frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0 \to 2z_0$ kiam $z \to z_0$, kiu ajn estu z_0. Sed $f(z) = \bar{z}$ (konjugito de z) ne estas holomorfa ĉe 0, ĉar se $z = it, \forall t \in R$, $\frac{\bar{z} - 0}{z - 0} = -1$, kaj $\forall z \in R$, $\frac{\bar{z} - 0}{z - 0} = 1$, do la limo ne estas sendependa je la maniero alproksimiĝi al 0.

holomorfaj funkcioj



Tiujn holomorfajn funkciojn oni kapablas integri laŭ difinita vojo, kaj tia integrado estas unu el la plej uzendaj iloj de kompleksa analitiko. Por integri la funkcion $f(z)$ laŭ la vojo Γ_1, mi povas ekzemple :

dispartigi la vojon en malgrandajn intervalojn $[z_i, z_{i+1}]$ kun longo maksimume egala je ε, kaj kalkuli la limon :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1}) = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz$$

aŭ konsideri, ke Γ_1 estas difinita per funkcio $g : [0, 1] \to C$, derivebla preskaŭ ĉie, kaj kalkuli : $\int_0^1 f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz$

Ĉiukaze tia integrado ne eblas por iu ajn vojo nek iu ajn funkcio ;

koncerne la vojon : tiuj, kiujn oni bezonas plej ofte, estas konstruitaj per cirkloj kaj rektoj, kaj do senproblemaj.

koncerne la funkcion : la fakto, ke la funkcio estas holomorfa, estas ja pli ol sufiĉa. Do mi ne detaligos la kondiĉojn, kiuj ebligas la integradon, mi prefere menciu la plej gravan proprecon de holomorfaj funkcioj rilate tian integradon, nome : la teoremo de Cauchy.

★ Se f(z) estas difinita kaj holomorfa en kaj interne de fermita vojo Γ, tiam : $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ ★

Mirinda teoremo, ĉu ne ? Mi ne demonstros ĝin tie, sed nur klopodos komprenigi, kion ĝi signifas kaj kial ĝi ne estas tiom surpriziga, ol ĝi unuavide aspektas.

Se mi konsideras du punktojn A kaj B en la vojo Γ, mi povas iri de A al B laŭ du vojoj Γ_1 kaj Γ_2 (restante en Γ). Do la integraĵon de f(z) inter A kaj B mi povas kalkuli ĉu laŭ Γ_1, ĉu laŭ Γ_2. Kaj la integraĵo de f(z) laŭ Γ estas tutsimple la diferenco inter la integraĵoj laŭ Γ_1 kaj laŭ Γ_2. Do la teoremo signifas, ke sub kelkaj kondiĉoj eblas aserti la egalecon de la integraĵoj laŭ Γ_1 kaj laŭ Γ_2. Alidire la integraĵo de f(z) inter A kaj B, sub kelkaj kondiĉoj, estas sendependa de la vojo uzita por iri de A al B. Tio signifas, ke f(z) havas malderivaĵon, F(z), tiel ke : $\int_A^B f(z)\,dz = F(B) - F(A)$, sendepende de la vojo uzita por iri de A al B. Por funkcio de reela variablo, sufiĉas la kontinueco (eĉ malpli) por aserti la malderiveblecon. Por funkcio de kompleksa variablo, la kondiĉo estas ege pli forta : la funkcio estu derivebla (holomorfa) en tuta regiono. Do, finfine, la teoremo de Cauchy ne estas tiel miriga. Multe pli mirigaj estas la konsekvencoj de tiu teoremo.

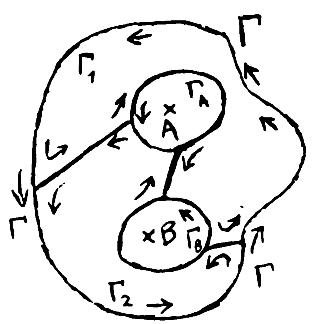
Ĉar ja, kio okazas se f(z) ne estas holomorfa en la tuta interno de Γ ? Tiun problemon ni renkontas interalie por $f(z) = \frac{a}{z}$ se la vojo Γ ĉirkaŭas la punkton 0. Ekzemple Γ estu cirklo : $z = re^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$, tiam :

$$\int_\Gamma \frac{a}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{a\,re^{i\theta}\,id\theta}{re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} a\,i\,d\theta = 2i\pi a$$

sendepende de r.

Plej ofte (sed ja ne ĉiam), la mispunktoj interne de Γ (do la punktoj, kie f(z) ne estas holomorfa) estas polusoj, tio estas punktoj kie f(z) fariĝas nefinia (do : 1/f(z) fariĝas nula). Oni povas demonstri, ke ĉe poluso w, la funkcio skribiĝas : $f(z) = \frac{a_n}{(z-w)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z-w)^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{z-w} + h(z)$ kie h(z) estas holomorfa ĉe w. Sed por demonstri tion, oni bezonas la ĉi-postajn teoremojn. Do ni provizore difinu poluson kiel punkton, ĉe kiu la funkcio skribiĝas tiel.

Unue ni rimarku, ke eblas disigi la kontribuojn de la diversaj polusoj al la integraĵo, tio estas : konsideri la diversajn polusojn aparte.



Supozu, ke estas du polusoj interne de Γ, A kaj B. La integraĵo laŭ Γ estas la sumo de la integraĵoj laŭ Γ_1, laŭ Γ_2, laŭ Γ_A kaj laŭ Γ_B. Interne de Γ_1 kaj Γ_2 estas neniu poluso, do la integraĵoj laŭ tiuj vojoj estas nulaj. Por Γ_A kaj Γ_B, mi elektu etajn cirklojn ĉirkaŭ A kaj B, tiel ke finfine la integraĵo laŭ Γ estas la sumo de la integraĵoj laŭ etaj cirkloj ĉirkaŭ la polusoj.

Sur tia eta cirklo ĉirkaŭ poluso w, la funkcio skribiĝas :
$f(z) = \frac{a_n}{(z-w)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z-w)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z-w} + h(z)$; $h(z)$ estas holomorfa ĉe w, do ties integraĵo laŭ la eta cirklo estas nula. $\frac{a_k}{(z-w)^k}$ havas malderivaĵon $\frac{1}{(k-1)}\frac{a_k}{(z-w)^{k-1}}$, krom se k = 1. Do ties integraĵo laŭ iu ajn fermita vojo estas nula (por du punktoj A kaj B, $\int_A^B f(z)\,dz = F(A) - F(B)$ sendepende de la vojo). Restas $\frac{a_1}{z-w}$, kies integraĵo laŭ cirklo ĉirkaŭ w valoras $2i\pi a_1$ (tion ni ĵus kalkulis kiam w = 0). Do nur gravas por la integraĵo la valoro de tiu koeficiento a_1 : ĝin ni nomas la restaĵo de f(z) ĉe w, oni skribas tion : $a_1 = \mathrm{Res}\,(f, w)$, kaj ni ĵus demonstris la gravan teoremon pri restaĵoj :

★ Se la vojo Γ ĉirkaŭas unufoje en la pozitiva senco la polusojn $A_1, A_2, \ldots A_n$, kaj se la funkcio f(z) estas holomorfa en kaj interne de Γ krom ĉe la polusoj, tiam

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, A_k)$$ ★

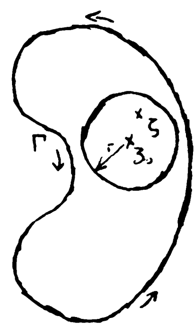
Funkcio, kiu estas holomorfa krom ĉe polusoj nomiĝas meromorfa. La plej grava teoremo koncerne meromorfajn funkciojn estas, ke ĉiu meromorfa funkcio estas kvociento de du holomorfaj funkcioj (kaj reciproke). Tio estas, ke ekde la ringo de la holomorfaj funkcioj mi povas konstrui la korpon de la meromorfaj funkcioj, same kiel ekde la ringo de la polinomoj mi povas konstrui la korpon de la racionalaj funkcioj. Tio montras interalie, ke la polusoj de meromorfa funkcio ludas similan rolon kiel ĝiaj nulaĵoj (punktoj, kie ĝi nuliĝas). Nome, ke se mi skribas la meromorfan funkcion f(z) kiel kvocienton de du holomorfaj funkcioj : f(z) = p(z) / q(z), la nulaĵoj de f(z) estas la nulaĵoj de p(z), la polusoj de f(z) estas la nulaĵoj de q(z), la polusoj de f(z) estas la nulaĵoj de 1 / f(z) kaj reciproke. Pro tio mi kelkfoje uzos la vorton "malpolusoj" kiel sinonimon de "nulaĵoj".

Kaj tiu simileco inter polusoj kaj malpolusoj havas gravajn konsekvencojn : rezultas de la ĉi-supra (provizora) difino de poluso, ke polusoj estas disaj punktoj. Same, malpolusoj nepre estas disaj punktoj. Konsekvence, se holomorfa funkcio nuliĝas sur ne-diskreta aro (ekzemple sur linio aŭ disko), do se ĝiaj malpolusoj ne estas disaj, ĝi estas idente nula (kongrua je nulo). Kaj de tio ni deduktas la gravan teoremon pri analitika pluigado :

★ Se du funkcioj f(z) kaj g(z) estas holomorfaj sur la sama regiono Ω kaj kongruaj sur ne-diskreta parto de Ω (ekzemple linio aŭ disko), tiam ili estas kongruaj sur la tuta regiono Ω. ★

Tio rezultas de la fakto, ke la holomorfa funkcio f(z) − g(z) nuliĝas sur ne-diskreta aro, kaj de tio rezultas, ke se la funkcio f(z) estas difinita sur iu regiono, kaj se eblas, per iu ajn maniero, pluigi ĝin al pli vasta regiono, tiam la pluigaĵo estas unika, tio estas, ke per kiu ajn alia maniero oni pluigu ĝin, oni nepre atingos la saman rezulton. Pro tio oni nomas tiun teoremon la teoremo pri analitika pluigado. Sed ja, kial analitika ? Kial ne holomorfa pluigado, tutsimple ?

Ĝis nun mi ne demonstris multon. Mi asertis multajn teoremojn, klarigis ties signifon... Nun mi skize (ne tute komplete) prezentu la demonstraĵon de la plej grava teoremo koncerne holomorfajn funkciojn.



Mi konsideru fermitan vojon Γ, funkcion $f(z)$ holomorfan en kaj interne de Γ, kaj punkton z_0 interne de Γ. La funkcio : $f(z)/(z-z_0)$ estas meromorfa en kaj interne de Γ, ĝia nura poluso estas z_0 kun restaĵo $f(z_0)$, ĉar : $\dfrac{f(z)}{z-z_0} = \dfrac{f(z_0)}{z-z_0} + \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, kaj $h(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ estas holomorfa ĉe z_0 ($h(z_0) = f'(z_0)$; fakte ni ankoraŭ ne kapablas aserti, ke h estas derivebla ĉe z_0, sed ni kapablas malpliigi la valid-kondiĉojn de la teoremo de Cauchy tiel, ke tiu aserto ne estu bezonata). Do dank'al la teoremo pri restaĵoj, ni rajtas skribi : $f(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,dz$,

Nun, mi konsideru etan diskon kun centro z_0 kaj radiuso r, kiu entute troviĝu interne de Γ. En tiu disko mi elektu ajnan punkton ζ. Refoje mi rajtas skribi : $f(\zeta) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$, sed mi ankaŭ rajtas skribi, por iu ajn $z \in \Gamma$:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$ uzante la formulon :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \ldots \quad \text{se } |u| < 1$$ (kio ja veras pro la elekto de ζ sufiĉe proksima je z_0). Do mi rajtas skribi :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n\right] dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n dz$$

Por pravigi la permuton de la sumado kaj integrado, sufiĉas diri, ke la sumado estas uniforme konverĝa, kaj demonstri, ke tio veras, kaj ke tio ja sufiĉas.

Nu, en la integrato troviĝas termino $(\zeta-z_0)^n$ sendependa je z, kaj la aliaj terminoj estas sendependaj je ζ. Mi do rajtas skribi :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-z_0)^n\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$, kaj eĉ, nomante : $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\zeta-z_0)^n = a_0 + a_1(\zeta-z_0) + a_2(\zeta-z_0)^2 + \ldots$$

Nun, mi rimarku, ke por iu ajn funkcio f holomorfa sur regiono Ω, por iu ajn punkto z_0 interne de Ω, eblas trovi fermitan vojon Γ internan je Ω kaj etan diskon kun centro z_0 internan je Ω, tiel ke tiu demonstrado validu. Krome, teoremo pri potenc-serioj asertas, ke ne povas ekzisti du kongruaj potenc-serioj kun malsamaj koeficientoj, do la koeficientoj a_n dependas nur de f kaj z_0, ne de Γ. Finfine, tiu (preskaŭ tute demonstrita) teoremo vortiĝas jene :

★ Se $f(z)$ estas holomorfa en regiono Ω kaj se z_0 estas interna je Ω, ekzistas disko kun centro z_0, kie la funkcio skribiĝas :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$ ★

Grava konsekvenco de tiu teoremo estas, ke holomorfa funkcio estas aŭtomate senfine derivebla. Sed eĉ pli ! funkcio, kiu skribiĝas kiel sumo de tia potenc-serio nomiĝas "analitika". Kaj tio vekas du rimarkojn :

unue : kelkaj matematikistoj ne parolas pri "holomorfaj funkcioj", sed pri "(kompleksaj) analitikaj funkcioj". Ni tuj atentu, ke ekzistas analitikaj funkcioj de ne-kompleksa variablo, ekzemple de reela variablo, difinitaj per ekzisto, ĉe ĉiu punkto, de tiaj potenc-serioj. Evidentas, ke la parenceco inter holomorfaj funkcioj kaj analitikaj funkcioj estas tre forta, nome : ĉiu holomorfa funkcio estas analitika, ĉiu analitika funkcio de reela variablo estas pluigebla ĝis holomorfa funkcio, ktp... Multaj teoremoj validaj por la holomorfaj funkcioj ankaŭ validas por aliaj analitikaj funkcioj, interalie la teoremo pri analitika pluigado. Sed laŭdifine holomorfa funkcio estas nur derivebla funkcio, tio ege gravas, ĉar estas pli facile montri, ke funkcio estas derivebla, ol montri, ke ĝi estas analitika. En R (aro de la reeloj), funkcio derivebla ne nepre estas analitika ; ekzistas eĉ funkcioj senfine deriveblaj, kiuj ne estas analitikaj, kaj ili ludas gravegan rolon en la teorio pri distribucioj (distribucio estas pli-malpli la derivaĵo de ne-kontinua funkcio). En C, ni havas la ŝancon, ke ĉiu derivebla funkcio estas ne nur senfine derivebla, sed eĉ analitika : grava kaj mirinda teoremo ! sed ĉu tiu eksterordinara sinonimeco inter "derivebla" kaj "analitika" ne meritas apartan nomon ? ĉu ne indas konservi la vorton "holomorfa" ?

due : tian potenc-serion oni nomas franclingve "série entière", laŭvorte : entjera serio. Kaj tiun esprimon mi nun sufiĉe ŝatas, ĝin almenaŭ mi povas iom pravigi :

de potenc-serioj ja ekzistas diversaj specoj. Se iu funkcio estas meromorfa kaj se w estas poluso, ni vidis, ke, proksime al w, f(z) skribiĝas :

$$f(z) = \frac{a_n}{(z-w)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z-w)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z-w} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-w)^k ,$$ kaj ja ankaŭ tio estas potenc-serio (sed ne entjera serio). Eĉ ekzistas alispecaj potenc-serioj, kiujn ni francoj nomas "serioj de Laurent" : $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-w)^n$. Ekzemple, se $f(z) = e^z + e^{1/z}$, f estas holomorfa en la tuta ebeno krom ĉe 0, kaj havas ĉe 0 disvolvaĵon per serio de Laurent : $e^z + e^{1/z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, kun $\begin{cases} a_{-m} = 1/m! \\ a_0 = 2 \\ a_m = 1/m! \end{cases}$ $(m > 0)$

Tio estas potenc-serio, sed ne entjera serio.

Kial oni parolu pri "entjeraj serioj" ? Ĉar fakte, se mi konsideras nombron reelan, ĝi povas esti ĉu entjera, ĉu racionala, ĉu ne-racionala. Kaj racionalo ĉiam estas kvociento de du entjeroj. Same, se mi konsideras funkcion holomorfan apude de iu punkto, ĉe tiu punkto ĝi povas esti ĉu holomorfa, ĉu meromorfa (do la punkto estas poluso), ĉu ne-meromorfa (la punkto estas esenca mispunkto, ekzemple 0 por $f(z) = e^z + e^{1/z}$). Kaj meromorfa funkcio ĉiam estas kvociento de du holomorfaj funkcioj. Do ekzistas bela simetrio inter nombroj kaj funkcioj holomorfaj apude de iu punkto. Sed funkcio holomorfa apude de iu punkto estas difinebla pere de potenc-serio, kiu estas ĉu entjera potenc-serio, ĉu (se temas pri poluso) "racionala" potenc-serio, ĉu (se temas pri esenca mispunkto) (potenc-)serio de Laurent.

Tio jam pravigas la vorton "entjera (potenc-)serio". Sed ja neniam oni parolas pri "racionalaj" potenc-serioj. Tio devenas de la fakto, ke tiaj serioj ludas multe malpli gravan rolon ol entjeraj (potenc-)serioj, tiel, ke ilin oni konsideras kiel apartan kazon de (potenc-)serioj de Laurent. Same kiel oni parolas pri paraj kaj ne-paraj nombroj, sen havi similan terminologion por nombroj divideblaj de tri.

Por pli pravigi la uzadon de entjera en tiu senco, utilas mencii, kio estas entjera funkcio, laŭ tiu terminologio. Temas pri funkcio holomorfa en la tuta kompleksa ebeno. La entjera (potenc-)serio de tia funkcio, ĉe iu ajn punkto, estas konverĝa ĉie ajn, kaj per ĝi oni povas plej ekzakte kaj plej komplete difini la funkcion. Ekzemple : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n$, por iu ajn $a \in C$.
Tiaj funkcioj ludas aparte gravan rolon en kompleksa analitiko. Plej utila estas la teoremo de Liouville, laŭ kiu ĉiu entjera funkcio barita (t.e. $|f(z)| \leq M$, por ĉiu z) estas konstanta (t.e. $f(z) \equiv a$). La teoremo de Picard aldonas, ke sufiĉas, ke du punktoj ne havu malbildon (t.e. $f^{-1}(a) = \emptyset$) por aserti, ke f estas konstanta. Do ĉiu entjera funkcio estas "preskaŭ" surjekcia (surĵeta), maksimume nur unu punkto ne estas atingita (tio okazas ekzemple por la funkcio e^z, kiu neniam nuliĝas). Aliflanke, sufiĉas, ke du punktoj havu finian malbildon (t.e. $f^{-1}(a) = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$) por aserti, ke f estas polinomo. Interalie, krom la funkcioj : $z \mapsto az+b$, neniu entjera funkcio estas injekcia (enĵeta) (t.e. $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$). Kiam temas pri funkcio holomorfa ne en la tuta kompleksa ebeno, sed nur en difinita regiono, tio absolute ne plu validas. Tre facile oni trovas funkciojn injekciajn (enĵetajn) kaj ne surjekciajn (surĵetajn), kaj aparte gravan rolon ludas la holomorfaj bijekcioj de unu regiono al alia (ekzemple de duon-ebeno al disko aŭ simile. Teoremo : se holomorfa funkcio estas bijekcia, ties malfunkcio estas holomorfa). Pro tio oni nepre bezonas apartan terminon por funkcioj holomorfaj en la tuta kompleksa ebeno, kaj la franca terminologio tiurilate ŝajnas al mi imitinda.

Tamen mi ne konsilas tiun terminon "entjera" pro du kaŭzoj :

unue ĉar ofte oni estas ĝenata, kiam oni pritraktas entjerajn funkciojn, kiuj al entjero respondigas entjeron, pro la dusenceco de tiu vorto "entjero" en la sama frazo,

due, ĉar racionalaj funkcioj devus esti, laŭ tiu terminologio, kvocientoj de du entjeraj funkcioj, do meromorfa funkcio. Sed tio ne okazas : ni ne havas terminon por distingi funkcion meromorfan en la tuta ebeno kaj funkcion meromorfan nur en difinita regiono, kaj racionala funkcio estas la kvociento ne de du entjeraj funkcioj, sed de du polinomoj, kiuj estas speciala speco de entjeraj funkcioj. Do eble tiuj-ĉi pli meritus la nomon "entjera funkcio".

Por eviti tiujn du malavantaĝojn, mi sugestas, ke oni parolu ne pri "entjeraj serioj" kaj "entjeraj funkcioj", sed pri "antjeraj serioj" kaj "antjeraj funkcioj". Tiel la vorto "entjera" ĉiam rilatu al nombro, la vorto "antjera" al holomorfa funkcio, tamen ambaŭ vortoj restu suriĉe parencaj pro la ĉi-supraj kialoj. Ĉiu komento pri tiu propono estu bonvena !

*

* *

Kaj nu, kio nova pri niaj nombroj de Bernouilli ?

Jam ni difinis ilin, kaj ni nun scias, kion signifas tiu difino : la funkcio : $\frac{t}{e^t - 1}$ estas meromorfa en la tuta kompleksa ebeno (kvociento de du antjeraj funkcioj), ĝi ne havas poluson ĉe $t = 0$, ĉar tie ĝi havas finian limon : 1, do ĝi estas disvolvebla per antjera serio, ni do tute rajtas skribi, por t sufiĉe proksima al 0, $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$, kio difinas la nombrojn de Bernouilli.

La rilato inter tiu formulo kaj la trigonometriaj funkcioj tg x kaj cotg x estas facile videbla, pro la fama formulo : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Kelkfoje oni tiel difinas la funkciojn cos x kaj sin x, difinante la eksponencialan funkcion per ĝia antjera serio : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; sed se oni uzas alian difinon de sin x kaj cos x, oni atingas la formulon demonstrante, ke ekzistas unu nura funkcio f(x), de R al C, derivebla, kiu verigas : $f(0) = 1$, $f'(0) = i$, kaj, por iuj ajn reeloj x kaj y, $f(x+y) = f(x).f(y)$, temas pri : $f(x) = \cos x + i \sin x$, same kiel, por iu ajn reelo a, ekzistas unu nura funkcio $g_a(x)$, de R al C, derivebla, kiu verigas : $g_a(0) = 1$, $g_a'(0) = a$, kaj, por iuj ajn reeloj x kaj y, $g_a(x+y) = g_a(x).g_a(y)$, temas pri la funkcio $g_a(x) = e^{ax}$. Oni ankaŭ povas kompari la antjerajn seriojn de e^x, sin x. kaj cos x, kaj atingi la saman rezulton.

Ĉiukaze, la studo de tiuj trigonometriaj funkcioj ebligas aserti, krom la formulo : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kaj la fakto, ke tiuj trigonometriaj funkcioj estas antjeraj funkcioj, ke : $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ki\pi$, kun k entjero ($\in Z$). Do ni nun scias, kie troviĝas la polusoj de nia meromorfa funkcio : $\frac{t}{e^t - 1}$.

Ni ankaŭ scias, ke : $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x} = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$

$$= i + \frac{1}{x} \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} = i + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2ix)^n}{n!}$$

Kaj jen la (ne-antjera) potenc-serio de cotg x ĉe la poluso 0 !

Tiun formulon ni povas plibonigi per diversaj konstatoj : unue, cotg x estas ne-para funkcio, tio signifas, ke $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg } x$, kaj de tio sekvas, ke ties potenc-serio ne entenas parajn potencojn de x. Interalie, ĝi ne entenas konstanton, do la konstanto i nepre nuliĝas kun la termino $2i.B_1$, kio pruvas, ke $B_1 = -\frac{1}{2}$. Kaj de la fakto, ke la aliaj paraj potencoj de x havas nulan koeficienton sekvas, ke la ne-paraj koeficientoj de Bernouilli, B_{2n+1}, krom B_1, estas nulaj. Pro tio kelkaj matematikistoj modifis la numerigon de la nombroj de Bernouilli, tiel ke en la vico ne troviĝu nulaj nombroj, kelkaj eĉ modifis la signon de tiuj nombroj, tiel ke ili estu ĉiuj pozitivaj. Sed tiuj aliaj difinoj de la nombroj de Bernouilli havas, laŭ mi, neniun avantaĝon rilate la simplecon de la formuloj, do ni konservu la ĉi-supran difinon kaj skribu la potenc-serion de cotg x :

$$\text{cotg } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{2n!} 2^{2n} x^{2n-1}$$

Tamen, ĉu ni ne kapablas diri ion pri la signo de la nombroj de Bernouilli ? Antaŭ ol respondi al tiu demando, ni trovu la potenc-serion de tg x ĉe 0. Kaj por trovi tion, ni faru la jenan amuzan kalkulon :

$$\text{cotg } x - \text{tg } x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \,.\, \cos x} = \frac{\cos(2x)}{\frac{1}{2}.\sin(2x)} = 2\,\text{cotg}(2x)$$

sekve, $$\text{tg } x = \text{cotg } x - 2\,\text{cotg}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{2n!} 2^{2n}(1-2^{2n})\, x^{2n-1}$$

Refoje kelkajn komentojn : unue, se ni kalkulas : cotg x + tg x, ni kapablas kalkuli la potenc-serion de (1/sin x) , kaj tion vi povas fari mem.

La potenc-serio de $(1/\cos x)$ estas iom pli komplika, ĝin oni kalkulos fine de la artikolo.

Due, ni havas en tiu potenc-serio de $\operatorname{tg} x$ tre gravan informon koncerne la signon de la nombroj de Bernouilli, ĉar ni scias la signon de la koeficientoj de tiu potenc-serio de $\operatorname{tg} x$. Ili ĉiuj estas pozitivaj. Kial do ? Supozante, ke la unuaj (ĝis la koeficiento de x^{2n-1}) estas pozitivaj, oni kapablas demonstri, ke la posta (do la koeficiento de x^{2n+1}) ankaŭ estas pozitiva, uzante la fakton, ke $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, kaj komparante la potenc-seriojn de $(\operatorname{tg} x)'$ kaj $(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. Mi ne pli detaligos la demonstradon, sed mi rimarkigos, ke ekde nun ni rajtas anstataŭi $(-1)^n B_{2n}$, por $n \geqslant 1$, per : $-|B_{2n}|$. Kaj nun, alia grava informo : Se mi skribas : $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, kaj se mi derivas tiun esprimon n-foje, mi povas aserti, ke : $\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{tg} x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{\cos^{n+1} x}$, kie P estas polinomo kun du variabloj kaj entjeraj koeficientoj. Nun, se mi konsideras tiun esprimon por $x = 0$, tiam $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, do $\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{tg} x) = \frac{P(0, 1)}{1}$ = entjero. Sed tiun n-an derivaĵon mi ankaŭ povas kalkuli per la potenc-serio, derivante n-foje tiun potenc-serion kaj poste anstataŭante x per 0. Montriĝas evidente, ke se n estas para tiu derivaĵo estas nula, sed la $(2n-1)$-a derivaĵo valoras : $\frac{B_{2n}}{2n}\, 2^{2n}(2^{2n}-1)$. Tio pruvas, ke tiu-ĉi esprimo estas entjero. Ĝis nun ni ankoraŭ nenion diris koncerne la racionalecon de la nombroj de Bernouilli, kvankam la difino permesis diveni, ke ili estas racionalaj. Sed ni nun scias pli ol tio, ni scias, ke la denominatoro de B_{2n} estas divizoro de $2^{2n}(2^{2n}-1)$. Antaŭ ol plu paroli pri tio, ni resumu la rezultojn ĝis nun atingitajn :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{B_{2n}}{2n!}\right| 2^{2n} x^{2n-1}$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{B_{2n}}{2n!}\right| 2^{2n}(2^{2n}-1)\, x^{2n-1}$$

Atentu, ke 2n! signifas (2n)!, ne 2(n!).

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$,

por $n \geqslant 1$, $B_{2n+1} = 0$

$B_{4n} < 0$, $B_{4n+2} > 0$

$\frac{B_{2n}}{2n}\, 2^{2n}(2^{2n}-1) \in Z$

Tiun lastan formulon koncerne la denominatoron de B_{2n} ni kapablos plibonigi fine de la artikolo. Eĉ eblas kalkuli eksplicite tiun denominatoron, sed tion ni ne faros. La nuna formulo havas jam la avantaĝon montri al ni, ke la denominatoroj de la nombroj de Bernouilli estas ege malgrandaj kompare kun la numeratoroj, kaj kompare kun la nombroj de Bernouilli mem. Ja ĝis nun ni nenion scias pri la grandeco de tiuj nombroj, sed baldaŭ ni scios.

Nu do, ĉu ni ekuzu nian faman teoremon pri restaĵoj ? Ni scias, kie troviĝas la polusoj de $\frac{t}{e^t - 1}$. Ni do scias, kie troviĝas la polusoj de $\frac{1}{t^{2n+1}} \frac{t}{e^t - 1}$ temas pri la samaj polusoj. Ĉu ?

Ne tute. La punkto 0, kiu ne estas poluso de $\frac{t}{e^t - 1}$, ja estas poluso de $\frac{1}{t^{2n+1}}\frac{t}{e^t-1}$, kaj tiu-ĉi funkcio havas ĉe 0 kiel potenc-serion :

$$\frac{1}{t^{2n+1}}\frac{t}{e^t-1} = \frac{B_0}{t^{2n+1}} + \frac{B_1}{t^{2n}} + \frac{B_2}{2!}\cdot\frac{1}{t^{2n-1}} + \dots + \frac{B_{2n}}{2n!}\cdot\frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2n+2k}}{(2n+2k)!}\,t^{2k-1}$$

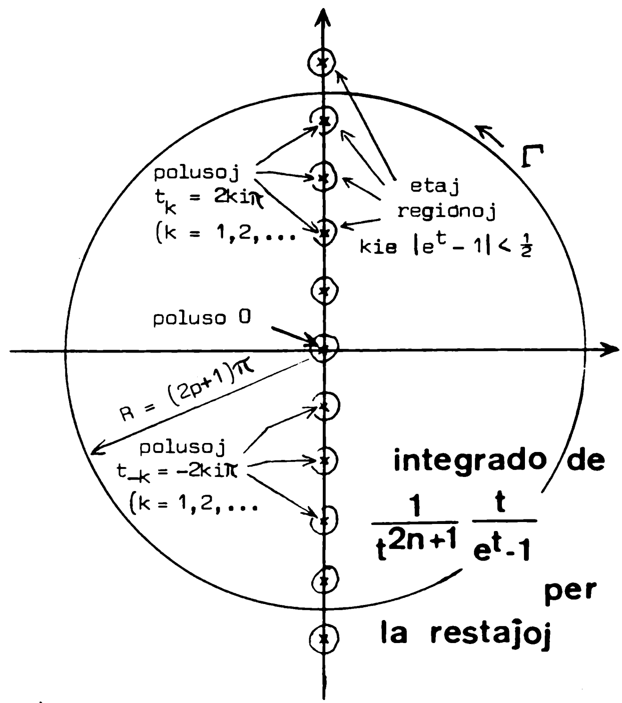
Do la restaĵo de $\frac{1}{t^{2n+1}}\frac{t}{e^t-1}$ ĉe 0 estas ekzakte : $\frac{B_{2n}}{2n!}$. Kaj tiun restaĵon ni do facile povos kalkuli dank'al la teoremo pri restaĵoj. Sed kondiĉe, ke oni ne preterlasu la aliajn polusojn.

La aliaj polusoj estas la punktoj $t_k = 2ik\pi$, ĉar $e^{t_k} = 1$. Por kalkuli la restaĵon ĉe simpla poluso (tio estas poluso, kie la funkcio skribiĝas simple : $f(t) = \frac{a}{t-t_k} + h(t)$, kun $h(t)$ holomorfa ĉe t_k kaj $a = \text{Res}\,(f,\ t_k)$), sufiĉas kalkuli, por $t \to t_k$, $\lim\,(t-t_k)\,f(t) = \lim\,(a + (t-t_k)h(t)) = a$. Notu, ke se t_k ne estas simpla poluso, tiu limo estas nefinia. Do, por kalkuli la restaĵon de $\frac{1}{t^{2n+1}}\frac{t}{e^t-1}$ ĉe t_k, sufiĉas kalkuli $\lim\frac{t-t_k}{t^{2n+1}}\frac{t}{e^t-1} = \frac{1}{t_k^{2n}} = \frac{1}{(2ki\pi)^{2n}}$ pro la fakto, ke : $\lim\frac{e^t-1}{t-t_k} = \lim\frac{e^t-e^{t_k}}{t-t_k} = \frac{d(e^t)}{dt}(t_k) = e^{t_k} = 1$.

Kaj la integraĵo ? Se mi elektas kiel vojon grandan cirklon kun radiuso $R = (2p+1)\pi$, tiu vojo pasas meze inter la du polusoj t_p kaj t_{p+1}, kaj do ĝi ĉirkaŭas la polusojn : 0, t_1, t_2 ... t_p kaj t_{-1}, t_{-2} ... t_{-p}. Sekve, la integraĵo sur tiu vojo valoras I_p kun

$$\frac{I_p}{2i\pi} = \frac{B_{2n}}{2n!} + 2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(2ik\pi)^{2n}}$$

Sed sur la tuta vojo ni havas $|e^t - 1| \geqslant \frac{1}{2}$, ĉar tiu komparaĵo validas ĉie en la ebeno krom en etaj regionoj ĉirkaŭ la punktoj $t_k = 2ki\pi$, kaj estas facile vidi, ke la vojo ne trairas tiujn etajn regionojn. Sekve, la integrado estas barita de $2/R^{2n}$ kaj, pro la evidenta rilato :



$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant (\text{longo}\,\Gamma).(\sup_{z\in\Gamma}|f(z)|),$$

ni rajtas skribi : $|I_p| \leqslant (2\pi R).\dfrac{2}{R^{2n}} = \dfrac{4\pi}{R^{2n-1}} = \dfrac{4\pi}{[(2p+1)\pi]^{2n-1}}$

Sekve ni demonstris, ke : $\left|\dfrac{B_{2n}}{2n!} + 2\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(2ki\pi)^{2n}}\right| = \dfrac{1}{2\pi}|I_p| \leqslant \dfrac{2}{[(2p+1)\pi]^{2n-1}}$

kaj se p kreskas al nefinio, tiu rilato permesas aserti : $\dfrac{B_{2n}}{2n!} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2ki\pi)^{2n}} = 0$.

kaj do, multiplikante tiun egalecon per $\dfrac{(2i\pi)^{2n}}{2}$:

$$\sum\frac{1}{k^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots + \frac{1}{k^{2n}} + \ldots = \left|\frac{B_{2n}}{2n!}\frac{(2\pi)^{2n}}{2}\right|$$

* Kiel apartan kazon de tiu ĝenerala formulo, ni retrovas : *

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

Krome, ni nun havas tre precizan takson de la grandeco de la nombroj de Bernouilli, ĉar la maldekstra flanko de la egalaĵo preskaŭ egalas 1, do $|B_{2n}| \simeq 2\dfrac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$; tio pruvas, ke ili kreskas tre tre rapide, multe pli rapide ol iliaj denominatoroj, kiuj estas divizoroj de : $2^{2n}(2^{2n}-1)$.

Tiun saman formulon ni povas atingi per tute alia maniero.

Ni ĵus kalkulis la potenc-seriojn de tg x kaj cotg x ĉe 0, sed tiuj potenc-serioj havas multajn malavantaĝojn : unue ili estas komplikaj, ĉar ne ekzistas tre simpla maniero kalkuli la nombrojn de Bernouilli. Due ili konverĝas nur sur eta regiono ĉirkaŭ 0. Multe pli avantaĝe estus disvolvi tiujn trigonometriajn funkciojn per simplaj serioj, kiuj konverĝu ĉie. Kaj tio ja eblas ! Temas ne pri potenc-serioj, sed pri la Eŭleraj serioj, kiuj ekzistas por multaj trigonometriaj (kaj eventuale aliaj) funkcioj.

Ni konsideru racionalan funkcion $R(z)$. Ankaŭ ĝin mi kapablas disvolvi per potenc-serioj. Sed aliflanke mi kapablas malkombini ĝin en simplajn elementojn, tio estas : ĉe ĉiu poluso z_k de $R(x)$ $(k = 1, 2, \ldots p)$, mi skribas :

$R(z) = \dfrac{a_{n,k}}{(z-z_k)^n} + \dfrac{a_{n-1,k}}{(z-z_k)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_{1,k}}{z-z_k} + R_k(z)$, kie $R_k(z)$ estas nova racionala funkcio, kiu ne havas poluson ĉe z_k. Se mi faris tion ĉe ĉiu poluso, fama teoremo asertas, ke : $R(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{p}\left[\dfrac{a_{n,k}}{(z-z_k)^n} + \ldots + \dfrac{a_{1,k}}{z-z_k}\right]$, kie $P(z)$ estas polinomo.

Tiu teoremo validas por racionalaj funkcioj, sed ĉu ĝi povas ankaŭ validi por meromorfaj funkcioj kun nefinio da polusoj ? Jes ja ! kaj tio estas trafa enkonduko de la Eŭleraj serioj :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x+k\pi} + \frac{1}{x-k\pi}\right]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\, x &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{x - \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{-1}{x + \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \right] \\ \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{x - k\pi} + \frac{(-1)^k}{x + k\pi} \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - k\pi} \\ &\text{ktp... ktp... ktp...} \end{aligned}$$

Unue mi memorigu la principon de la demonstrado, kiam temas pri racionalaj funkcioj : la racionala funkcio havas polusojn. Se mi fortranĉas de ĝi ĉiujn $\frac{a_{p,k}}{(z - z_k)^p}$, mi forviŝas ĉiujn polusojn. Sekve, la cetera funkcio estas racionala funkcio sen polusoj, do polinomo.

De tiu demonstrado oni klopodos inspiriĝi por atingi niajn Eùlerajn seriojn. Sed la unua ŝtupo konsistas en la demonstrado, ke la Eùlera funkcio ne nur konverĝas ĉe ĉiu punkto (krom la polusoj), sed konverĝas al meromorfa funkcio. Pri la konverĝo, temas pri ne tro malfacila demonstrado, sed atentu, ke tiu kondiĉo de konverĝado necesigas, por kelkaj Eùleraj serioj, ke oni grupigu la terminojn duope. Nur ĉe $1/\sin x$ (kaj tamen kelkaj aliaj) la serio konverĝas eĉ sen tia grupigo. Pri la fakto, ke la Eùlera serio konverĝas al meromorfa funkcio, tio devenas de iu teoremo pri konverĝo de holomorfaj funkcioj, kiu vortiĝas : "se funkcioj f_n holomorfaj sur regiono Ω konverĝas, uniforme sur ĉiu kompakto de Ω, al funkcio f, tiam f estas holomorfa sur Ω". Sed ĝis nun, mi provis pritrakti tiun artikolon sen aludi topologion - kio ja estas mirinda rekordo ! -, do mi ne detaligos tiun teoremon. Mi simple rimarkigos, ke estas neniu simila teoremo koncerne la deriveblajn funkciojn de reela variablo (vidu unu el la certumaĵoj), kaj ke, por demonstri tiun teoremon, oni rajtas inspiriĝi je la demonstrado, laŭ kiu ĉiu holomorfa funkcio estas analitika.

Nun, ni scias, ke la Eùlera serio ja konverĝas al meromorfa funkcio. Do se ni subtrahas de la studata funkcio ties Eùleran serion, ni forviŝas ĉiujn polusojn (ni konstruis la Eùleran serion tiel, ke ĉe iu ajn poluso ĝi tute similiĝu al la funkcio), kaj restas antjera funkcio. Do, ni uzu la teoremon de Liouville, laŭ kiu ĉiu antjera funkcio barita nepre estas konstanta ; ni demonstru, ke tiu cetera antjera funkcio estas barita, horizontale ĉar ĝi estas perioda ($f(z+2\pi) = f(z)$), vertikale ĉar la meromorfaj funkcioj : tg z, cotg z, $1/\sin z$, ... estas mem baritaj (do se $z = x + iy$, $\forall x \in R$, $y \to \infty \Rightarrow$ $\mathrm{tg}\, z \to 1$, $\mathrm{cotg}\, z \to 1$, $1/\sin z \to 0$, ktp...). Kaj ankaŭ la Eùleraj serioj estas baritaj vertikale. Do la cetera funkcio ja estas kaj antjera kaj barita, sekve konstanta. Kaj tiun konstanton ni facile kalkulas rimarkante, ke $f(z) + f(-z) = 0$. Do nun la egalaĵo estas demonstrita.

Ni atentigu, ke ni uzis la teoremon de Liouville, kies demonstradon oni kutime atingas per la teoremo pri restaĵoj laŭ metodo tre simila je la ĉi-supra rekta demonstrado de nia formulo. Por demonstri tiun saman formulon per la Eùleraj serioj, sufiĉas disvolvi ĉiun terminon de la serio per potenc-serio : $\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} - \ldots - \frac{x^n}{a^{n+1}} - \ldots$, adicii tiujn potenc-seriojn kaj kompari la sumon kun la potenc-serio de la koncerna funkcio. Tio estas do malrekta metodo, tamen ĝi estas valida kaj krome la Eùleraj serioj mem estas ja interesaj.

Tiu disvolvado per Eùleraj serioj povas ĝeneraliĝi al multaj aliaj funkcioj, ne nur la trigonometriaj. Se ni rigardas la demonstradon, estas nur du kondiĉoj, por ke eblu tia disvolvado per Eùlera serio : unue, ke la Eùlera serio taùge konverĝu, due, ke la cetera funkcio estu barita. Do ekzemple, por iu ajn polinomo $P(z)$, la funkcio : $\dfrac{1}{e^z - P(z)}$ estas disvolvebla per Eùlera serio. Sed tio ne tre utilas por funkcio, kies polusojn oni ne konas precize. Kaj praktike, nur por la trigonometriaj funkcioj la Eùleraj serioj estas uzeblaj.

Se funkcio ne havas polusojn, ĝi ne estas disvolvebla per Eùlera serio. Tamen ekzistas kelkfoje, por anstataùi Eùlerajn seriojn, la Eùleraj produtoj. Ekzemple, por sin z :

$\dfrac{(\sin z)'}{\sin z} = \operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{x-k\pi} + \dfrac{1}{x+k\pi}\right]$ sed ni scias, ke $\dfrac{(\prod u_k)'}{\prod u_k} = \sum \dfrac{u_k'}{u_k}$

kaj : se $u_k = \lambda(x-k\pi)$, $\dfrac{u_k'}{u_k} = \dfrac{1}{x-k\pi}$; do ne tre malfacile ni demonstras la formulon :

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right) \qquad \text{(Eùlera produto)}$$ *

Apud la potenc-serioj, kiuj nepre ekzistas por ĉiuj holomorfaj kaj meromorfaj funkcioj, kaj la Eùleraj serioj, kiujn oni povas ĝeneraligi al multaj meromorfaj funkcioj, eĉ al antjeraj funkcioj se ni konsideras ankaù la Eùlerajn produtojn, ekzistas alispecaj serioj, kiuj ekzistas nur por eta kategorio de funkcioj, nome : la serioj de Dirichlet (Dirikletaj serioj). Temas pri : $f_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$; kondiĉe, ke la vico a_n ne kresku tro rapide, tia serio konverĝas almenaù sur duon-ebeno $Re(s) > \sigma_0$ (do, se $s = \sigma + i\tau$, $\sigma > \sigma_0$), kaj la funkcion tiel difinitan oni ofte kapablas pluigi analitike ĝis funkcio meromorfa sur la tuta ebeno.

La plej fundamenta kaj la plej tipa ekzemplo de Dirikletaj serioj estas la funkcio ζ (dzeta) difinita per : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ por $Re(s) > 1$.

Ĉu ne amuza hazardo ? Ni ĵus parolis pri ĝi. Nome, estas ĝi, kiun oni renkontis en la ĵus demonstrita formulo. Sed eble vi ne rimarkis tion, ĉar vi ankoraù ne konis tiun funkcion kaj ne sciis, ke ĝi estas unu el la plej gravaj funkcion de la tuta analitiko (krom, kompreneble, la eksponencialaj-logaritmaj-trigonometriaj-ktp..., kaj la funkcio Γ (gama)).

La unua matematikisto, kiu rimarkis ĝin, estas Leonhard Euler (en 1748). Li pruvis, ke : $\zeta(s) = \prod \dfrac{1}{1-(1/p)^s}$ (produto por ĉiuj primnombroj $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$). Fakte, $\dfrac{1}{1-(1/p)^s} = 1 + (\frac{1}{p})^s + (\frac{1}{p^2})^s + \ldots + (\frac{1}{p^n})^s + \ldots$ kaj se mi kalkulas la produton de tiuj serioj por ĉiu p, mi nepre atingas $\sum (\frac{1}{n})^s$ por ĉiu n, ĉar ĉiu n skribiĝas laù unu kaj nur unu maniero kiel $p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$ (p_1, p_2, ... p_n estas primnombroj).

Sed Euler ne provis ekspluati sufiĉe funde tiun formulon, do la unua matematikisto, kiu vere studis la funkcion ζ, estas Bernhard Riemann (en 1859). Pro tio la funkcion ζ oni kelkfoje nomas : la funkcio de Riemann.

Fakte, same kiel ni konstruis, ekde Eŭleraj serioj, Eŭlerajn produtojn, eblas konstrui, ekde la ĉi-supra produto, la jenan serion : $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\text{Log } p}{p^s - 1}$ (sumo por ĉiuj primnombroj p), kio refoje estas disvolvebla per Dirikleta serio : $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, kun $\Lambda(n) = \text{Log } p$ se $n = p^k$ (p primo, $k \geqslant 1$), $\Lambda(n) = 0$ alikaze.

Nun, la fama teoremo pri restaĵoj multe utilos al ni. Ĝi utilos unue por aserti, ke se x kaj c estas pozitivaj reeloj, metante $x^s = e^{s.\text{Log } x}$,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s}\,ds = \begin{matrix} 2i\pi & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{matrix}$$

Fakte, ni kalkulos la integraĵon sur la segmento $[c - iT, c + iT]$ kaj la duon-cirklo $|s - c| = T$. Sed ja, kiu duon-cirklo ?

Se $x > 1$, x^s fariĝas malgranda kiam s iras al maldekstro ; male, se $0 < x < 1$, x^s fariĝas malgranda kiam s iras al dekstro. Do :

En la unua kazo, ni konsideru la maldekstran cuon-cirklon Γ_1, sur kiu ni povas bari : $\left|\int_{\Gamma_1} \frac{x^s}{s}\,ds\right| \leqslant \frac{A + B \text{ Log } T}{T - c}$, barante aparte sur la cirklo-segmento $\text{Re}(s) \leqslant -\frac{\text{Log } T}{\text{Log } x}$ (do $x^s \leqslant \frac{1}{T}$) kaj sur la restantaj cirklo-segmentoj, kies longo estas barita de $(a + b.\text{Log } T)$. Sed interne de tiu vojo troviĝas la poluso $s = 0$, kun restaĵo 1 ; kaj do, kiam T kreskas al nefinio, la integraĵo sur la duon-cirklo malkreskas al nulo, sed restas la kontribuo de la poluso, sekve $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s}\,ds = 2i\pi$.

Se $0 < x < 1$, ni konsideru la dekstran duon-cirklon Γ_2. Refoje, disigante la cirklo-segmentojn $\text{Re}(s) \geqslant -\frac{\text{Log } T}{\text{Log } x}$ (do $x^s \leqslant \frac{1}{T}$, ĉar $x < 1$), kaj $\text{Re}(s) \leqslant -\frac{\text{Log } T}{\text{Log } x}$, ni atingas similan baron por la integraĵo sur Γ_2. Sed ĉi-foje ne estas poluso interne de la vojo. Pro tio, ni atingas ĉi-foje : $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s}\,ds = 0$.

Nun, la mirinda afero estas, ke se f(s) estas disvolvebla per Dirikleta serio, do se : $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, kiu taŭge (uniforme) konverĝu sur la rekto : $]c - i\infty, c + i\infty[$, tiam, se $x \notin \mathbb{N}$,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{x^s}{s}\,ds = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right] \frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s}\,ds = 2i\pi \sum_{n<x} a_n$$

Ekzemple, se $f(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, tiu metodo ebligas al ni kalkuli : $\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n)$;

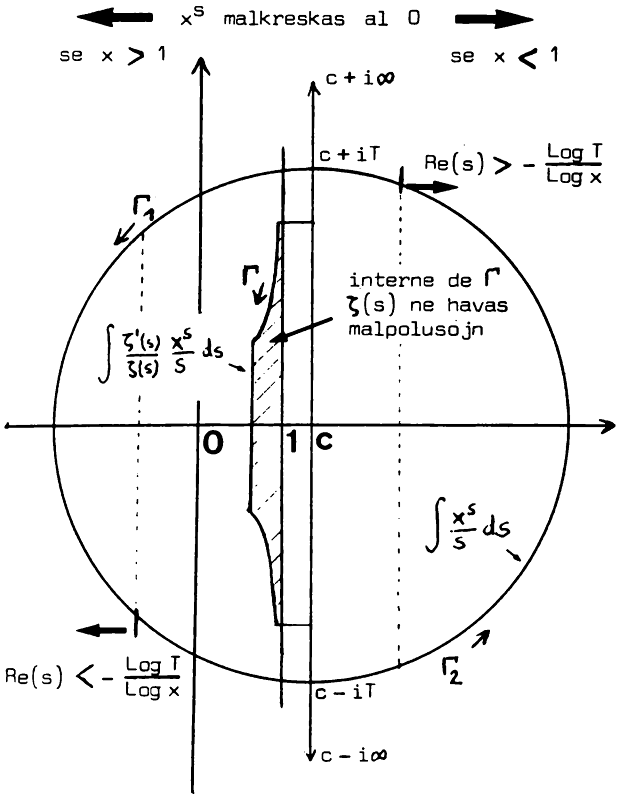
$$\bigstar \quad \left| \begin{matrix} c \in \mathbb{R}, \; c > 1, \\ x \in \mathbb{R}_+, \; x \notin \mathbb{N}, \end{matrix} \implies \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\,ds = 2i\pi\,\psi(x) \right| \quad \bigstar$$

Konante tiun funkcion $\psi(x)$, se mi metas $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \text{Log } p$ (p primo), mi montras facile, ke $|\psi(x) - \theta(x)| \leqslant \sqrt{x}\,\text{Log } x$, kaj se $\pi(x)$ estas la nombro da primnombroj $\leqslant x$, $\pi(x) = \sum_{k \leq x} \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{\text{Log}\, k} \simeq \frac{\theta(x)}{\text{Log}\, x} + \sum_{k \leq x} \theta(x-k)\left[\frac{1}{\text{Log}(x-k)} - \frac{1}{\text{Log}(x-k+1)}\right]$

$$\pi(x) \simeq \frac{\theta(x)}{\text{Log}\, x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t.\text{Log}^2 t}\, dt$$

do tuj kiam ni konos $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds$, (por iu ajn reelo $x > 1$), ni kapablos diri proksimume, kiom ekzistas da prim-nombroj $p < x$, por ĉiu reelo x. Interese, ĉu ne ?

Refoje ni uzos la teoremon pri restaĵoj, sed... la plej dekstra poluso de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ estas $s = 1$, ĉar por $\text{Re}(s) > 1$, $\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - (1/p)^s}$ (produto por ĉiuj primnombroj), ĝi do havas nek polusojn nek malpolusojn, sekve $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ estas holomorfa. Kiam $s \rightarrow 1$, restante reelo > 1, tiam : $\lim\,(s-1)\,\zeta(s) = 1$, ĉar $\frac{s-1}{n^s} > \frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} > \frac{s-1}{(n+1)^s}$, sekve $1 > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s-1}{n^s} > (\frac{1}{2})^{s-1} > 1 - (s-1)\,\text{Log}\, 2$, do .: $s > (s-1)\,\zeta(s) > 1$.



Ni ankoraŭ ne pluigis ζ al la tuta ebeno. Per la formulo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = \left[1 - (\tfrac{1}{2})^{s-1}\right]\zeta(s)$$

ni jam povas pluigi ĝin analitike al $\text{Re}(s) > 0$, kaj konstati, ke en tiu nova duon-ebeno ĝi ne havas poluson krom $s = 1$. Sed ni nenion scias pri ĝiaj malpolusoj, do estas ege malfacile trovi vojon por apliki nian teoremon pri restaĵoj, tio estas vojo, kiu ĉirkaŭu la punkton 1 sen enteni malpolusojn de $\zeta(s)$. Riemann mem rezignis pri tiu problemo. Nur en 1896 oni sukcesis demonstri, ke iuspecaj vojoj (vidu figuron) ne entenas malpolusojn de $\zeta(s)$. Sed tia vojo estas ne plej kontentiga, ĉar la integraĵo sur la maldekstra parto Γ de la vojo estas malbone barita. Se ni povus elekti kiel vojon ortogramon (rektangulon), la rezulto estus ege pli bona. Tion ni ne kapablas fari nuntempe. Tamen, eĉ per tiu malbona vojo, oni kapablas bari la integraĵon sur la maldekstra flanko tiel, ke la kontribuo de la poluso 1 estu ja la plej grava, kio rajtigas aserti :

$$\bigstar \quad \left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds \;=\; 2i\pi\, \psi(x) \;\simeq\; 2i\pi x, \quad \text{sekve : } \pi(x) \simeq \frac{x}{\mathrm{Log}\, x} \right| \quad \bigstar$$

Krome, eblas demonstri, ke en tiu bendo : 0 Re(s) 1, estas nefinio da malpolusoj de (s), kaj ju pli oni malproksimiĝas (t.e. kiam s), des pli nombraj ili estas.

Sed nu, ni ankoraŭ ne pluigis nian funkcion al la tuta ebeno ! Por tion fari, suriĉas demonstri la formulon : $(1-s) = (s).(s).\frac{2\cos(\ s/2)}{(2\ )^s}$, tio estas : trovi funkcion f(s), meromorfan en la tuta ebeno, kiu estu egala je la dekstra flanko de la formulo kiam Re(s) 1, kaj egala je la maldekstra flanko de la formulo kiam Re(s) 0, do kiu pluigu ambaŭ flankojn de la formulo analitike al la tuta ebeno.

Sed antaŭ ol demonstri tiun formulon, necesas kompreni ĝin. (s) estas la fama funkcio , meromorfa en la tuta ebeno, kaj veriganta interalie :

s C, (s+1) = s. (s) kaj (1) = 1

De tio rezultas tuj, ke se n N, (n+1) = n! , kaj fakte oni (= Euler) kreis tiun funkcion por pluigi la faktorialojn ĝis analitika funkcio. Krome oni rimarkas, ke 0 estas poluso de , sekve ĉiu negativa entjero ankaŭ estas poluso, kaj se ekzistus alia poluso aŭ malpoluso , tiam ĉiu (r+n) (por n Z) ankaŭ estus poluso aŭ malpoluso.

Sed la ĉi-supraj formuloj ne sufiĉas por difini komplete la meromorfan funkcion . Nicolas Bourbaki rimarkigas, ke sufiĉas aldoni al ili la komparaĵon : x R_+, y R_+, (2x). (2y) $(x+y)^2$. Ofte oni preferas aldoni la jenan formulon : Re(s) 0 (s) = $e^{-t}\, t^{s-1}$ dt , kaj tio povas utili por montri, ke : (s). (s) = $\frac{u^{s-1}}{e^u - 1}$ du , kaj konstrui sur tiu egalaĵo demonstradon, per subtila uzado de la teoremo pri restaĵoj, de la ĉi-supra formulo. Tamen mi persone preferas trian eblecon, nome : s C, $\lim_n \frac{(s+n)}{(n).n^s} = 1$, tio pruvas interalie, ke ne havas malpolusojn, nek polusojn krom la negativaj entjeroj, kaj ebligas kalkuli praktike tiun funkcion ĉe diversaj punktoj. Se oni memoras pri la Eŭlera produto de sin x, oni tuj povas demonstri, per tiu-ĉi difino de , la faman formulon pri komplementoj : (s). (1-s) = / sin s. Notu, ke ankaŭ por (s) ekzistas Eŭlera produto.

Nun, ni supozu demonstrita la formulon :

$(1-s) = (s).(s).\frac{2\cos(\ s/2)}{(2\ )^s}$, kaj ni vidu, kio okazas se s = 1+ : $\zeta(s) \simeq 1/\varepsilon$, $\cos(\pi s/2) \simeq -\pi\varepsilon/2$, sekve $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Nun, se s = 2n+1, $\cos(\frac{\pi s}{2}) = 0$, sekve $\zeta(-2n) = 0$. Kaj se s = 2n, $\zeta(s) = (-1)^{n+1} . \frac{B_{2n}}{2n!} . \frac{(2\pi)^{2n}}{2}$, $\Gamma(2n) = (2n-1)!$ sekve $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$; kaj tiujn tri rezultojn ni rajtas grupigi per la jena formulo :

$$* \quad \left| \ \forall n \in N \text{ (inkl. } n = 0\text{)}, \quad \zeta(-n) = (-1)^n . \frac{B_{n+1}}{n+1} \ \right| \quad *$$

Belega rezulto, ĉu ne ? Nun, dank'al la nombroj de Bernouilli, ni konas la valoron de ζ ĉe ĉiu entjero, pozitiva kaj negativa. Ĉu vere ?

Ne ! bedaŭrinde... mankas : 3, 5, 7, 9, ... kaj ĉiuj ne-paraj pozitivaj entjeroj. Kaj ne ekzistas bela simpla formulo, nek por $\zeta(3)$, nek por $\zeta(5)$, ... nek por $\zeta(2n+1)$ ... Por iomete koni tiujn nombrojn, necesas kalkuli ties unuajn decimalojn per kalkul-maŝino aŭ komputoro. Ekzemple, mi provis, antaŭ kelka tempo, kalkuli $\zeta(3)$ kun 30 decimaloj, kaj mi atingis :

$$\zeta(3) = 1{,}202056903159594285399738161511...$$

Kiel mi faris do ? Ĉu per komputoro aŭ plej potenca kalkul-maŝino ? Ne. Per tute ordinara kalkul-maŝino. Eĉ sen iu ajn ilo tute eblas fari tiun kalkulon. Dank'al la nombroj de Bernouilli, kompreneble...

Kaj temas pri tute alia utileco de tiuj samaj nombroj de Bernouilli. Ĉu vi konas la formulon de Taylor : $f(x+h) = e^{h\nabla} f(x)$? Vi verŝajne konas tiun formulon, sed neniam vi skribis ĝin tiel. Mi supozu, ke f estas analitika ĉe x, tiam, se h ne estas tro granda, mi ja plene rajtas skribi :

$$f(x+h) = f(x) + h.\frac{df}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!}.\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}.\frac{d^nf}{dx^n}(x) + \dots$$

Mi difinu : $\nabla = \frac{d}{dx}$, kaj mi faktorigu f(x) tiel, ke :

$$f(x+h) = \left[1 + h.\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{2!}.\frac{d^2}{dx^2} + \dots + \frac{h^n}{n!}.\frac{d^n}{dx^n} + \dots\right] f(x) = e^{h\nabla} f(x)$$

Ridinde ? Atendu do ! Notu intertempe, ke ∇ legiĝas "nabla".

Mi konsideru ĉiujn formalajn seriojn : $a_0 f + a_1.\frac{df}{dx} + \dots + a_n.\frac{d^nf}{dx^n} + \dots$ kaj mi decidu skribi formale tiujn seriojn : $(a_0 + a_1\nabla + \dots + a_n\nabla^n + \dots) f$; Tio estas nur formala skrib-maniero, do tute prava. Nun, mi supozu, ke en difinita regiono la serio : $a_0 f(x) + a_1 \frac{df}{dx}(x) + \dots + a_n \frac{d^nf}{dx^n}(x) + \dots$ konverĝu al analitika funkcio F(x). Mi diru tiam, ke la funkcio F estas difinita per la formala serio ĉi-supre. Kaj mi rajtas skribi, por iu ajn koeficiento b_m :

$$b_m \frac{d^mF}{dx^m}(x) = b_m a_0 \frac{d^mf}{dx^m}(x) + b_m a_1 \frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}}(x) + \dots + b_m a_n \frac{d^{m+n}f}{dx^{m+n}}(x) + \dots$$

Tio signifas, ke la funkcioj difinitaj, laŭ nia formala skrib-maniero, per : $b_m\nabla^m F$ kaj $(b_m\nabla^m)(a_0 + a_1\nabla + \dots + a_n\nabla^n + \dots) f$ estas identaj. Pli ĝenerale, se F kaj f estas du analitikaj funkcioj, kaj se F estas difinita per la formala serio : $(a_0 + a_1\nabla + \dots + a_n\nabla^n + \dots) f$, se G estas nova analitika funkcio difinita per la formala serio : $(b_0 + b_1\nabla + \dots + b_m\nabla^m + \dots) F$, tiam G estas ankaŭ difinebla per la formala serio : $(b_0 + \dots b_m\nabla^m + \dots)(a_0 + \dots a_n\nabla^n + \dots) f$. Do resume : ni kapablas manipuli tiujn formalajn seriojn ekzakte kiel ni manipulas la normalajn potenc-seriojn. Interalie, se : $F(x+h) - F(x) = f(x)$, tion ni skribas formale : $(e^{h\nabla} - 1) F = f$. Ne malpli formale ni rajtas skribi :

$$F = \frac{f}{e^{h\nabla} - 1} = \frac{1}{h\nabla}\frac{h\nabla}{e^{h\nabla} - 1} f = \frac{1}{h\nabla}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(h\nabla)^n}{n!} f = \frac{1}{h\nabla} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(h\nabla)^{n-1}}{(n-1)!} f$$

kie : $\frac{1}{h\nabla}$ signifas evidente : $\frac{1}{h}\int f(t)\,dt$; kaj do se en iu regiono la serio : $\frac{1}{h}\int_a^x f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} h^{n-1} \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x)$ konverĝas al analitika funkcio $F(x)$, eblas nun aserti, ke : $F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\frac{d^nF}{dx^n}(x) = (e^{h\nabla} - 1)\,F(x) = f(x)$.

Nun, mi konsideru : $f(x) = 1/x^3$, $h = 1$, kaj mi supozu, ke ekzistas analitika funkcio F tia, ke $F(x+1) - F(x) = 1/x^3$. La n-a derivaĵo de $1/x^3$ estas $(-1)^n \frac{(n+2)!}{2.x^{n+3}}$, sekve : $F(x) = \text{Konstanto} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} - \sum_{n\geq 1} \frac{(n+\frac{1}{2})B_{2n}}{x^{2n+2}}$
Sed se mi aranĝos la konstanton tiel, ke : $F(1) = 0$, mi havos (por $x \in N$) :

$$F(x) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{(x-1)^3} = \text{Konstanto} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} - \sum_{n\geq 1}\frac{(n+\frac{1}{2})\,B_{2n}}{x^{2n+2}}$$

Kaj kiom valoras tiu konstanto ? $\zeta(3)$, evidente ! (kalkulu la limon por $x \to +\infty$).
Sekve, ni havas por iu ajn x :

$$\zeta(3) = \left[1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{(x-1)^3}\right] + \left[\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + \sum_{n\geq 1}\frac{(n+\frac{1}{2})\,B_{2n}}{x^{2n+2}}\right]$$
$$= \left[1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{x^3}\right] + \left[\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \sum_{n\geq 1}\frac{(n+\frac{1}{2})\,B_{2n}}{x^{2n+2}}\right]$$

Sed ne estus honeste preterlasi, ke okazas en tiu formulo eta katastrofo, nome : la serio tute ne konverĝas ! $\left|\frac{(n+\frac{1}{2}).B_{2n}}{x^{2n+2}}\right| \simeq \frac{(2n+1)!}{(2\pi x)^{2n}}\frac{1}{x^2}$
Kaj tio, por iu ajn x, estas plej ne-konverĝa ; la termino malkreskas kiam $2n+1 < 2\pi x$ kaj poste rapide kreskas al nefinio ! do nia demonstrado ne plu taŭgas. Estus necese skribi, ekde la komenco :

$$F(x) = \text{Konstanto} + \frac{1}{h}\int_a^x f(t)\,dt - \tfrac{1}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{A} \frac{B_{2n}}{2n!} h^{2n-1} \frac{d^{2n-1}f}{dx^{2n-1}}(x) + C_A(x)$$

kaj demonstri, ke eblas bari kontentige la ceteran funkcion $C_A(x)$. Ekzistas amaso da eblecoj por bari la ceteran funkcion en tiu formulo, nomata : formulo de Euler. Nicolas Bourbaki aludas kelkajn. Neniu el ili plaĉas al mi. La plej uzebla barado estus, laŭ mi, teoremo, kiu asertus, ke sub kelkaj kondiĉoj la ceteraĵo estas barita per la unua preterlasita termino, do : $|C_A(x)| < \left|\frac{B_{2A+2}}{(2A+2)!} h^{2A+1} \frac{d^{2A+1}f}{dx^{2A+1}}(x)\right|$
Mi fakte ne scias, sub kiuj minimumaj kondiĉoj tio veras, sed mi povas garantii al vi, ke por $f(x) = 1/x^3$, tio ja veras. Pro tio ni povas tute facile kalkuli $\zeta(3)$ kun 30 decimaloj, la kalkulon mi faris ĉi-apude, unue per x = 25, due per x = 30 (necesas fari dufoje la kalkulon por certiĝi, ke oni ne misfaris ĝin).
Mi notis mallonge : $*(2n+2) = \frac{(n+\frac{1}{2})\,B_{2n}}{x^{2n+2}}$ kaj : $*3 = -\frac{1}{2x^3}$;

ζ(3) KALKULITA KUN 30 * decimaloj

sumo de $1/k^3$ ĝis k = x

x = 25

1	1,00000000000000000000000000000000
2	12500000000000000000000000000000
3	3703703703703703703703703703704
4	1562500000000000000000000000000
5	800000000000000000000000000000
6	462962962962962962962962962963
7	291545189504373177842565597668
8	195312500000000000000000000000
9	137174211248285322359396433471
10	100000000000000000000000000000
11	75131480090157776108189331330
12	57870370370370370370370370370
13	45516613563950842057350933091
14	36443148688046647230320699708
15	29629629629629629629629629630
16	24414062500000000000000000000
17	20354162426216161204966415632
18	17146776406035665294924554184
19	14579384749963551538125091121
20	12500000000000000000000000000
21	10797969981643451031206133247
22	9391435011269722013523666416
23	8218952905399852058847702803
24	7233796296296296296296296296
25	6400000000000000000000000000
	1,20128826350038305131702379521634

aldonaj Bernouilli-aĵoj

*2	+	8000000000000000C000000000C00
*3	–	3200000000000000000000000000
*4	+	64000000000000000000000000
*6	–	34133333333333333333333
*8	+	54613333333333333333
*10	–	157286400000000000
*12	+	699050666666667
*14	–	4416402383238
*16	+	37580963840
*18	–	414263912
*20	+	5741938
*22	–	97739
*24	+	2004
*26	–	49
*28	+	1

1,20205690315959428539973816151146 =

x = 30

1,00000000000000000000000000000000	1
12500000000000000000000000000000	2
3703703703703703703703703703704	3
1562500000000000000000000000000	4
800000000000000000000000000000	5
462962962962962962962962962963	6
291545189504373177842565597668	7
195312500000000000000000000000	8
137174211248285322359396433471	9
100000000000000000000000000000	10
75131480090157776108189331330	11
57870370370370370370370370370	12
45516613563950842057350933091	13
36443148688046647230320699708	14
29629629629629629629629629630	15
24414062500000000000000000000	16
20354162426216161204966415632	17
17146776406035665294924554184	18
14579384749963551538125091121	19
12500000000000000000000000000	20
10797969981643451031206133247	21
9391435011269722013523666416	22
8218952905399852058847702803	23
7233796296296296296296296296	24
6400000000000000000000000000	25
5689576695493855257168866636	26
5080526342529086013310979017	27
4555393586005830903790087464	28
4100209110664643896838738776	29
3703703703703703703703703704	30
1,20151955759476702251477191897231	.

+	55555555555555555555555555556	*2
–	1851851851851851851851851852	*3
+	30864197530864197530864198	*4
–	11431184270690443529950	*6
+	12701315856322715033	*8
–	25402631712645430	*10
+	78403184298288	*12
–	343978414921	*14
+	2032675148	*16
–	15560182	*18
+	149773	*20
–	1770	*22
+	25	*24

1,20205690315959428539973816151147

la unuaj nombroj de Bernouilli

0 :	+1	6 :	+1/42	14 :	+ 7/6	22 :	+6 192 + 17/138
1 :	−1/2	8 :	−1/30	16 :	−7 − 47/510	24 :	−86 580 − 691/2730
2 :	+1/6	10 :	+5/66	18 :	+55 − 23/798	26 :	+1 425 517 + 1/6
4 :	−1/30	12 :	−691/2730	20 :	−529 − 41/330	28 :	−27 298 231 − 59/870

Al multaj funkcioj oni povas apliki la formulon de Euler, kondiĉe, ke oni priatentu la ceteran funkcion, ĉar plej ofte la serio ne konverĝas. Interalie, vi povas apliki ĝin por kalkuli ĉiujn $\zeta(n)$ kun tiom da decimaloj, kiom vi deziras, kaj por kontroli, ke $\zeta(2n)$ ja egalas $\left|\frac{B_{2n}}{2n!}\frac{(2\pi)^{2n}}{2}\right|$, aŭ ankaŭ, ke

$$(\zeta(2)-1)+(\zeta(4)-1)+\ldots+(\zeta(2n)-1)+\ldots = 3/4$$
$$(\zeta(3)-1)+(\zeta(5)-1)+\ldots+(\zeta(2n+1)-1)+\ldots = 1/4$$

tio devenas de :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right] = 1, \text{ kaj}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\ \ldots+\frac{(-1)^k}{n^k}\ \ldots\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}.$$

Kaj ekzistas amaso da similaj formuloj !

Oni ankaŭ povas apliki ĝin al : $f(x) = \mathrm{Log}\, x \Rightarrow F(x) = \mathrm{Log}\,\Gamma(x)$, kaj dedukti de tio la faman formulon de Stirling : $\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1+\frac{1}{12x}+\ldots\right.$

La konstanton $\sqrt{2\pi}$ oni kalkulas per la formulo de Wallis : $\lim \frac{(2^n.n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} = \frac{\pi}{2}$ kiu demonstreblas per studado de $\int_0^{\pi/2}\sin^n t\, dt$ $(n \in N)$. Notu, ke la kondiĉo : $\mathrm{Log}\,\Gamma(x+1) - \mathrm{Log}\,\Gamma(x) = \mathrm{Log}\, x$ ne sufiĉas por difini Γ, ekzemple : ankaŭ $f(x) = \mathrm{Log}\,\Gamma(x) + \sin 2\pi x$ verigas tiun kondiĉon. Tamen ni ne bezonis alian hipotezon por apliki la formulon de Euler : tio pruvas, ke tiu formulo donas al ni nur unu el la diversaj funkcioj verigantaj $F(x+1)-F(x) = f(x)$ (la plej "regula").

Sed estas aparta kategorio de funkcioj, por kiuj tiu formulo de Euler aplikiĝas sen iu ajn problemo koncerne la ceteraĵon, nome : la polinomoj. Se mi konsideras polinomon $P(x)$, je grado d, tiam : $(a_0 + a_1\nabla + \ldots + a_n\nabla^n + \ldots)\ P$ difinas novan polinomon sen iu ajn problemo pri konverĝado, ĉar la derivaĵoj de P estas idente nulaj ekde la $(d+1)$-a. Do la ĉi-supra demonstrado plene validas almenaŭ por la polinomoj, kaj rajtigas skribi interalie :

$$* \left|\begin{array}{l} \forall P \text{ polinomo}, \forall x \text{ entjero} \geqslant 2,\ P(1)+P(2)+\ldots+P(x-1) = Q(x)-Q(0) \\ \text{kun} \ :\ \ Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt - \frac{1}{2}P(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n!}\frac{d^{2n-1}P}{dx^{2n-1}}(x) \end{array}\right| *$$

Tio aplikiĝas interalie al la polinomoj : $P(x) = x^{n-1}$. Tiam ni skribas : $Q(x) = \frac{1}{n}B_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}$; la polinomoj $B_n(x)$ nomiĝas : "polinomoj de Bernouilli". Ili ludas gravegan rolon en la teorio pri la nombroj de Bernouilli :

* unue ĉar ili verigas : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x) - B_n(0) = n \sum_{k=0}^{x-1} k^{n-1}$, kaj interalie : $B_n(1) = B_n(0)$, se $n \geqslant 2$, kio provizas al ni unu el la manieroj kalkuli praktike la nombrojn de Bernouilli unu post la alia :

$$* \quad \left| \quad \forall n \text{ entjero} \geqslant 2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \quad \right| \quad *$$

Krome, por iu ajn entjero x, $B_{2n+1}(x) + B_{2n+1}(1-x) = 0$ (demonstrado per rikurado). Sekve tiu polinomo estas idente nula, kaj tio pruvas, ke $B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$. Nun, supozante, ke $2(2^k - 1)B_k$ estas entjero ĝis $k = 2n-1$ $(n \geqslant 1)$, la egaleco : $B_{2n+1}(1) = 0 = B_{2n+1}(\frac{1}{2})$ permesas aserti, ke : $(2n+1)(2(2^{2n}-1))B_{2n}$ ankaŭ estas entjero, sekve, ĉar ni jam montris, helpe de la potenc-serio de tg x, ke : $2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}$ estas entjero, ni tiel montras, per rikurado, ke $2(2^{2n}-1)B_{2n}$ estas entjero, por iu ajn $n \in \mathbb{N}$. Pli fajna demonstrado ebligus trovi la ekzaktan denominatoron de B_{2n} (teoremo de Clausen - von Staudt), tion ni ne faros. Sed fakte la plejmulto de la aritmetikaj teoremoj pri la nombroj de Bernouilli devenas de la studado de la polinomoj de Bernouilli.

* sed due, la polinomoj de Bernouilli ludas gravan rolon pro la formulo :

$$* \quad \left| \quad e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad \right| \quad *$$

kiu demonstriĝas simple per komparado de la potenc-serioj dekstre kaj maldekstre. Interalie tio ebligas skribi : $\frac{1}{\sin t} = \frac{2i}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{e^{it}}{t} \frac{2it}{e^{2it} - 1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\frac{1}{2}) \frac{(2it)^n}{n!}$

Ni tie retrovas, ke $B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$, ĉar la potenc-serio de $\frac{1}{\sin t}$ nepre estas nepara. Sed krome, komparante ĝin kun la jam trovita potenc-serio de $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{2}(\text{tg}\frac{t}{2} + \text{cotg}\frac{t}{2})$, ni deduktas, ke : $B_{2n}(\frac{1}{2}) = -(1 - (\frac{1}{2})^{2n-1})B_{2n}$.

Kaj kio nu pri la potenc-serio de $\frac{1}{\cos t}$?

$$\frac{1}{\cos t} = \frac{2}{e^{it} + e^{-it}} = 2e^{it}\left[\frac{1}{e^{2it} - 1} - \frac{2}{e^{4it} - 1}\right] = \frac{1}{it}\left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\tfrac{1}{2}) \frac{(2it)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\tfrac{1}{4}) \frac{(4it)^n}{n!}\right]$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (B_n(\tfrac{1}{2}) - 2^n B_n(\tfrac{1}{4})) \frac{(2it)^{n-1}}{n!}$$

Unue ni asertu, ke tiu potenc-serio de $\frac{1}{\cos t}$ nepre estas para, sekve : $B_{2n}(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2})^{2n} B_{2n}(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^{2n}(1 - (\frac{1}{2})^{2n-1})B_{2n}$. Poste, ĉar : $B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$, ni rajtas skribi : $\frac{1}{\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n+1}(\frac{1}{4})}{(2n+1)!} 4^{2n+1} t^{2n}$; Ni povas aldoni, ke ĉiuj koeficientoj de tiu potenc-serio estas pozitivaj, ĉar $(\frac{1}{\cos t})' = \frac{\text{tg } t}{\cos t}$ (sama demonstrado kiel por tg x). Krome ĉiuj derivaĵoj ĉe 0 de $\frac{1}{\cos t}$ estas entjeraj. Sekve, ni jam atingis :

$$* \left| \begin{array}{l} B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \ ; \ B_{2n}(\frac{1}{2}) = -(1 - (\frac{1}{2})^{2n-1}) B_{2n} \ ; \ B_{2n}(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2})^{2n} B_{2n}(\frac{1}{2}) \\ \frac{B_{2n+1}(\frac{1}{4})}{(2n+1)} 4^{2n+1} \in \mathbb{Z} : \text{la denominatoro de } B_{2n+1}(\frac{1}{4}) \text{ estas potenco de 2,} \end{array} \right| *$$

$$* \left| B_{4n+1}(\tfrac{1}{4}) < 0,\ B_{4n-1}(\tfrac{1}{4}) > 0, \text{ kaj : } \frac{1}{\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{B_{2n+1}(\frac{1}{4})}{(2n+1)!}\right| 4^{2n+1}\, t^{2n} \right| *$$

Sed bedaŭrinde ne eblas doni simplan esprimon de $B_{2n+1}(\frac{1}{4})$, pro la jena kaŭzo : se mi disvolvas $\frac{1}{\cos t}$ per Eŭlera serio, mi atingas : $\frac{1}{\cos t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{t - (n\pi + \frac{\pi}{2})}$, kaj se mi komparas tiun serion kun la potenc-serio de $\frac{1}{\cos t}$ skribante : $\frac{1}{t-a} = -\frac{1}{a} - \frac{t}{a^2} - \frac{t^2}{a^3} - \ldots - \frac{t^n}{a^{n+1}} - \ldots$, mi atingas :

$$* \left| \begin{array}{l} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \left|\dfrac{B_{2n+1}(\frac{1}{4})}{(2n+1)!}\, \dfrac{(2\pi)^{2n+1}}{2}\right| \\ \text{Interalie : } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \pi/4 \\ 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32} \end{array} \right| *$$

Sed la maldekstra flanko valoras preskaŭ 1, sekve : $|B_{2n+1}(\frac{1}{4})| \simeq 2\frac{(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}$ $|B_{2n+1}(\frac{1}{4})| \simeq \frac{2n+1}{2\pi}|B_{2n}| \simeq \frac{2\pi}{2n+2}|B_{2n+2}|$, kaj pro tiu 2π mi ja dubas, ke oni iam atingos simplan formulon por kalkuli $B_{2n+1}(\frac{1}{4})$ helpe nur de B_{2n} aŭ nur de B_{2n+2}.

Mi nun deziras aludi etan terminologian problemon koncerne la notadon de la nombroj de Bernouilli. Nicolas Bourbaki notas ilin ne per majuskla B, sed per minuskla b, tiel, ke oni ne konfuzu la nombron B_{2n} kun la polinomo $B_{2n}(x)$. Sed tiu maniero ne plaĉas al mi. Ĉar oni ofte uzas b_n por signi iun ajn vicon (kiam estas du ajnaj vicoj, ekzemple, la unuan oni nomu a_n kaj la duan b_n). Pro tio ne eblas meti en la notacion b_n signifon de preciza vico, nome la vico de la nombroj de Bernouilli. Laŭ mi, tiu sistemo estas pli konfuziga ol la sistemo, kiun mi uzis. Ĉar fakte ne estas granda risko je konfuzo inter $B_n(x)$ kaj B_n, pro la nepra skribado de la variablo : (x), kiam temas pri polinomo. Krome mi memorigos, ke $B_n = B_n(0)$, do oni tute facile povas imagi, ke la notacio B_n estas mallongigo de $B_n(0)$. Do jen mia nuntempa opinio tiurilate. Nu, kion vi opinias pri tio ?

*
* *

Unu el miaj doktorigaj disertaĵoj, prezentotaj ĉi-jare, temos ĝuste pri tiuj nombroj de Bernouilli. Ĉu tiuj-ĉi ? Ne. Sed pri aliaj, tre similaj.

Fakte mi konsideras unu el la difinoj de la nombroj de Bernouilli, kaj ĝin mi iomete modifas, tiel ke ĝi difinu aliajn vicojn de nombroj, kiujn mi nomas "ĝeneraligitaj nombroj de Bernouilli". Kaj de tiu eta modifo en la difino de miaj nombroj rezultas etaj modifoj en la proprecoj de tiuj nombroj, sed... kaj tio estas ja la interesa flanko de la afero : preskaŭ ĉiuj proprecoj de la nombroj de Bernouilli ĝeneraliĝas al miaj ĝeneraligitaj nombroj de Bernouilli. Amuze, ĉu ne ?

François LO JACOMO, 14 rue de la Pompe, F - 75016 Paris, Francujo.

al konstruado de maĵoranto por solvo de kelkaj eliptikaj **diferencialaj ekvacioj**

Valerij BOKOV

Abstrakto

Tie-ĉi estas konstruita maĵoranto por solvo de iu eliptika diferenciala ekvacio en rektangulo. Je ekzemplo de la POISSON-ekvacio estas montrita, kiel tre simple oni povas konstrui la maĵoranton utiligante : iujn funkciojn el la algebro de la logiko kaj teknikon de RITZ-metodo.

Formulado de problemo

Estu donata en domajno $\mathcal{D} = \{(x,y) : |x| \leq A,\ |y| \leq B\}$ la Poisson-ekvacio :

$$L\mathcal{U} = -\Delta\mathcal{U} = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{D} \tag{1}$$

$$\mathcal{U}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\mathcal{D} \tag{2}$$

kie $\partial\mathcal{D}$ estas la rando de la domajno, la funkcio $f(x,y)$ estas kontinua en $\mathcal{D}$ kaj kontinue daŭrigata sur $\partial\mathcal{D}$, tiel ke ĝi transformiĝas je nulo en la anguloj de $\mathcal{D}$. La problemo konsistas en konstruado de maĵoranto por la solvo de (1)-(2).

La tekniko de maĵorigado

Ni havu :

$$|f(x,y)| \leq \delta\ , \quad (x,y) \in \mathcal{D}$$

Ni prezentu en formo :

$$\mathcal{D} = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \tag{3}$$

kie Ω_1 kaj Ω_2 estas la strioj $|x| \leq A$, $|y| \leq B$ (konforme je fig. 1) ; $\wedge$ signifas operacion de la logika produto.

La randaj valoroj de $\mathcal{U}(x,y)$ je flankoj $|x| = A$ de rektangulo ni daŭrigas en la direktoj laŭlonge de stri-flankoj Ω_1 ; en analoga maniero ni etendas randajn valorojn de $\mathcal{U}(x,y)$ laŭlonge de la stri-flankoj Ω_2.

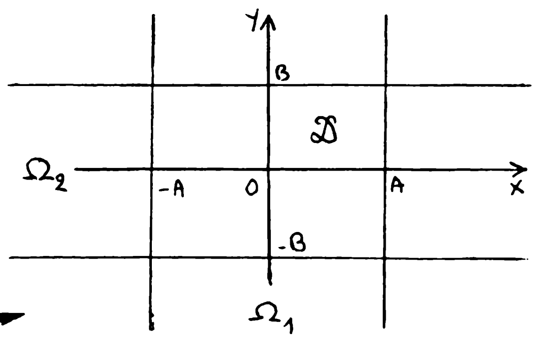


Fig. 1

Ĉe tio, en Ω_1 ni havos :

$$-\frac{d^2 \mathcal{U}}{dx^2} \leq \delta \qquad (x,y) \in \Omega_1$$

$$\mathcal{U}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega_1$$

kaj sekve : $$\mathcal{U}(x,y) \leq \psi_1(x) \equiv \frac{\delta}{2}(A^2 - x^2) \qquad \forall y \in \Omega_1 \qquad (4)$$

En Ω_2 validas :

$$-\frac{d^2 \mathcal{U}}{dx^2} \leq \delta \qquad (x,y) \in \Omega_2$$

$$\mathcal{U}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega_2$$

kaj sekve ni havas : $$\mathcal{U}(x,y) \leq \psi_2(y) \equiv \frac{\delta}{2}(B^2 - y^2) \qquad \forall x \in \Omega_2 \qquad (5)$$

El la (3)-(5) ni ricevas, ke en $\mathcal{D} = \Omega_1 \wedge \Omega_2$ validiĝas

$$\mathcal{U}(x,y) \leq \psi_1 \wedge \psi_2 \equiv \psi(x,y)$$

Ni fiksas $\wedge$ helpe de formulo [1] :

$$M \wedge N = \frac{1}{2}\left[M + N - \sqrt{M^2 + N^2 - 2\alpha MN}\right]$$

kie α = konstanto estas iu parametro, $-1 < \alpha \leq 1$;

Do ni havas :

$$\psi(x,y) = \frac{\delta}{4}\left[A^2 - x^2 + B^2 - y^2 - \sqrt{(A^2-x^2)^2 + (B^2-y^2)^2 - 2\alpha(A^2-x^2)(B^2-y^2)}\right].$$

Por ke $\psi(x,y)$ fakte estu la maĵoranto de la problemo (1)-(2), oni devas elekti konvenan valoron de la parametro α. Ĉi-tio estas tamen la plej malfacila parto de nia metodo, kiun kun sukceso oni povas komisii al komputoro. La proksimuman valoron de α oni povas kalkuli, ekzemple, el tiu kondiĉo, ke :

$$\int_{\mathcal{D}} \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2\right] - \psi f\right\} dx\,dy = \min_{(\alpha)} !$$

Ekzemplo

Estu $B = A$, $0 < f(x,y) \leq \delta$. Tiam la metodo per Fourier-vicoj donas $\max\limits_{(x,y)} \mathcal{U}(x,y) = \mathcal{U}(0,0) = 0{,}2943\,\delta A^2$. Dum : $\max\limits_{(x,y)} \psi(x,y) = \psi(0,0) = 0{,}2945\,\delta A^2$, estas realigita ĉe : $\alpha = 0{,}662$.

Konkludo

La proponata metodo estas tre simpla. Sola embaraso estas rentita nur ĉe la kalkulo de α. Tamen ĉiam la proksimuman valoron de α oni povas taksi helpe de Ritz- kaj/aŭ Galerkin-metodoj. En tiu kazo la proponata metodo povas esti ĝeneraligita je pli komplikaj eliptikaj ekvacioj.

Referencoj

[1] : E.V. TALANOV, V.N. SEMENOV, "Scienca Revuo", vol. 23, n-ro 5 (97), 1972, Beograd.

Summary

A simply majorante to the solution of Poisson-equation in rectangle is drived.

Kurze Zusammenfassung

Es ist eine Majorante für die Lösung der Poisson-gleichung im Rechteck ausgezogen.

Riassunto

Una maggioranta è costruita per soluzione della problema di Dirichlet del Poisson-equazione.

Glosoj

(ekster la Projekto de Internacia Matematika Terminaro preparita fare de A. BROISE, W. KLIMEK, V. LEBEDEV, J. WERNER, en 1976)

Abstrakto : konspekto, resumo, eksplikо (el libro, artikolo, ktp.),

Maĵoranto : maĵoriganta funkcio,

Maĵorigado : konstruado de maĵoriganta funkcio.

*

* *

Valerij BOKOV, Nevzorovoj 72 - 7, SU - 603 115 Gorjkij, Sovet-Unio.

la teoremo pri kvar koloroj

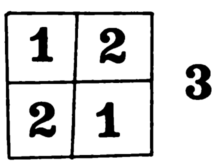
William ORR

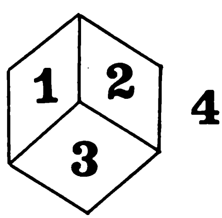
Lastatempe oni solvis unu el la elstaraj problemoj de pura matematiko, kaj la pruvo estis eksterordinara pro la utiligo de komputoroj. La artikolo, kiu sekvas, estas traduko de la raporto pri la pruvo, kiun aperigis la trovintoj en la revuo de la Usona Matematika Asocio. Mi donos ĉi-sube iom plu da informoj pri la problemo, kune kun difinoj de tiuj terminoj, kiuj estas nek PIV-aj, nek difinitaj en la artikolo mem. Tiujn terminojn mi substrekos.

La vorton mapo oni uzas ĉi-tie ne en la matematika senco de funkcio, sed en senco pli proksima al la ordinara lingvo, kiu respegulas la historion de la problemo. Mapo estas disdivido de surfaco en disjunktajn kampojn pere de simplaj fermitaj kurboj. La kampoj nomiĝas facoj. Ĉiu punkto, kiun tuŝas pli ol du facoj, estas vertico, kaj tiu parto de la kurbo inter du verticoj sen intera vertico estas eĝo. Du facojn kun komuna eĝo ni nomu apudaj.

La problemo estas la jena : se oni donas al ĉiu faco koloron, tiel ke neniuj du apudaj facoj havu la saman koloron, kiom da koloroj minimume bezoniĝas ? Tio dependas kompreneble de la speco de surfaco kaj de la individua mapo.

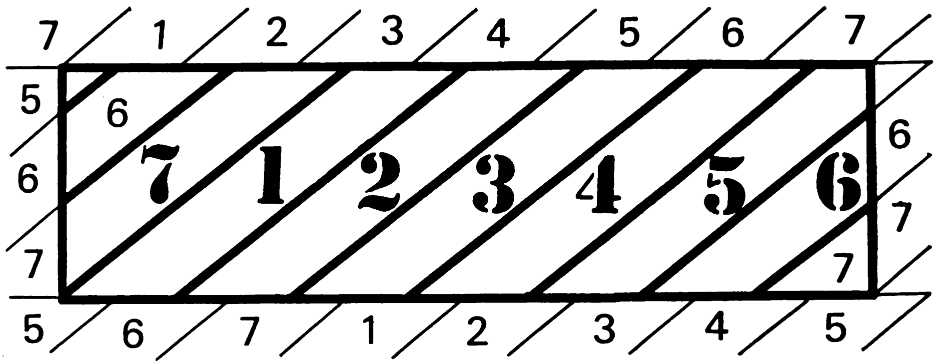
Ekzemple, en figuro 1 vidiĝas du ebenaj mapoj. La unua bezonas nur tri kolorojn, la dua bezonas kvar. Rimarku, ke la ekstero estas ankaŭ faco. Oni demandas, ĉu por certa surfaco ekzistas kolornombro, kiu sufiĉas por ĉiuj mapoj. Se vi komencas sur ebeno (aŭ sfero, kie la problemo estas ekvivalenta) desegni mapojn, vi baldaŭ konjektos, ke eble kvar koloroj ĉiam sufiĉas.





figuro 1

Sur toro la problemo estas alia. En figuro 2 estas mapo sur toro. Imagu, ke oni tranĉis la toron laŭ du kurboj, tiel ke la surfaco platigeblu en ebenon. Por fari toron de la ortogramo (t.e. ortangula paralelogramo), volvu ĝin kaj gluu la supran eĝon al la malsupra kaj la dekstran al la maldekstra. La mapo havas sep facojn, ĉiun apudan al ĉiu alia. Tial necesas sep koloroj. Mi indikis super kaj sub la ortogramo la kolorojn de la apudaj facoj.



figuro 2

Do, kvar necesas en ebeno, sep sur toro. Sed kiom sufiĉas ? La unua metodo de atako utiligis la formulon de Euler, laŭ kiu por ebena mapo,

$$f + v = e + 2$$

kie f, v kaj e estas la nombroj da facoj, verticoj, kaj eĝoj respektive. Per apliko de tiu formulo oni povas montri, ke ĉiu ebena mapo havas iun facon, kiu apudas al malpli ol ses aliaj facoj. Per induktado laŭ la nombro da facoj, sekvas, ke ses koloroj sufiĉas. Per iom pli subtila apliko de la formulo kaj la fakto, ke rekto disdividas ebenon en du partojn, oni povas pruvi plu, ke kvin koloroj sufiĉas. Sed ĉu kvar ? Jen la fama konjekto, kiu cerbumigis generaciojn da matematikistoj.

Surprize, la tora kazo estis antaŭ longe solvita - kaj la kazoj pri surfacoj de ĉiuj aliaj topologiaj genroj, krom nur la ebeno. Sur toro oni povas modifi la formulon de Euler jene : $f + v = e$. Per la priskribita metodo pruveblas, ke sep koloroj ĉiam sufiĉas. Sed ĝis la pasinta jaro* la demando pri ebenaj mapoj montriĝis nukso nekrevigebla.

Mi menciu, ke sur projektiva ebeno, Möbius-bendo, aŭ Klein-botelo necesas kaj sufiĉas ses koloroj.

Ordinare la problemon oni refrazigas, kiel demandon pri retoteorio (angle : GRAPH THEORY). Por tio, necesas konado al la bazaj difinoj.

Reto R estas finia, nenula aro V(R) de verticoj kune kun aro E(R) de duopaj partoj de V(R) ; elemento u, v nomiĝas eĝo, kaj estas ankaŭ skribita (u,v) aŭ uv. Se e = uv estas eĝo, u kaj v estas apudaj verticoj, e kaj u estas incidencaj. Se uv kaj vw estas eĝoj kaj $u \neq w$, tiuokaze uv kaj vw estas apudaj eĝoj. La nombro da eĝoj ĉe vertico estas ties grado.

Finia vico v_1, v_2, ... v_n de neidentaj verticoj, de kiu ĉiu apudas al la sekvanta, estas pado. Se n plias 2 kaj ankaŭ v_1v_n estas eĝo, la pado estas

* N.d.l.r. : = 1976

cirkvito aù ĉirkaŭiro. (Ĉe alternativa difino oni lasas esti ankaŭ eĝo vv, kiun oni nomas unuvertica eĝo aù maŝo).

Se V' kaj E' estas partoj de V(R), resp. E(R), kiuj kune estas reto R', R' nomiĝas subreto de R.

Se oni povas meti reton en ebenon, tiel ke la verticoj estu punktoj kaj inter du apudaj verticoj estu kurba segmento, el kiuj neniuj du havu internan punkton komunan (intersekciĝu interne), tiuokaze la reto nomiĝas ebena. Klare ebena reto disdividas la ebenon en facojn, por kiuj validas la formulo de Euler. Se ĉiu faco estas trieĝa (kaj sekve trivertica), oni nomas la reton triangulumo.

Supozu, ke f estas funkcio de unu reto al alia, tia ke : "uv estas eĝo de la unua" implicas : "f(u)f(v) estas eĝo de la dua". Nomiĝas f trempado, se plue ĝi estas loke injekcia, t.e. : por ĉiu v de la unua reto, la apudaj verticoj al f(v) estas bildoj de pare neidentaj apudaĵoj de v.

Nun, ni tradukos la ebenan mapon retolingven. De ebena mapo kreiĝu reto, kies verticoj estas la facoj de la mapo, kaj kies eĝoj estas apudaj duopoj (en la maposenco). Nun la demando estas : ĉu kvar koloroj sufiĉas por kolori la verticojn de iu ajn ebena reto, tiel ke du apudaj verticoj havu ĉiam malsamajn kolorojn ?

Minimala kontraù-ekzemplo signifas do reton bezonantan kvin kolorojn, kies ĉiu subreto bezonas ne pli ol kvar.

La problemo estas iam nomata la problemo de Guthrie, pro Francis Guthrie, kiu unue provis trovi la pruvon en 1850. En 1880, A. B. Kempe kaj P. G. Tait aperigis pruvojn, kiuj estis ĝenerale akceptitaj ĝis 1890, kiam misrezono en la pruvoj estis demonstrita.

Tio estas la fono de la demando, la kvar-kolora konjekto – nun teoremo. La pruvo priskribita en la sekvanta artikolo kaŭzis furoron inter matematikistoj pro la uzado de komputoroj por kontroli la "malpli ol 2 000 kazojn", laboro, kiu estus tute malebla por homo sen-ila. Oni demandas, ĉu tio estas la pruvmetodo de la estonteco ? Ĉu eĉ la Reĝino de la Sciencoj pli kaj pli dependos de la elektronikaĵoj ?

*

William ORR, department of mathematics, Hofstra University, Hempstead NY 11550, Usono.

Ĉiu ebena mapo estas kvarkolorebla

Kenneth APPEL & Wolfgang HAKEN

El : The Bulletin of the American Mathematical Society (la bulteno de la Usona Matematika Societo), Vol. 82, N-ro 5, septembro 1976, paĝoj : 711 - 712.

tradukis : William ORR

(Tiu verko aperas kompleta en du artikoloj :
Ĉiu ebena mapo estas kvarkolorebla ;
unua parto : malŝarĝigo, de K. Appel kaj W. Haken, kaj
dua parto : reduktebleco, de K. Appel, W. Haken kaj J. Koch.
Tiujn artikolojn konsideras alia revuo por aperigo).

La jena teoremo estas pruvita :

★**Teoremo** Ĉiu ebena mapo povas esti kolorita per ne pli ol kvar koloroj.★

Kiel fariĝis la kutimo, la kvarkolora problemo estos konsiderata laŭ la duala senco, kiel la problemo, ĉu la verticoj de ĉiu ebena reto (sen unu-verticaj eĝoj) povas esti koloritaj tiel, ke neniu vertico-paro kun komuna eĝo havu la saman koloron. La limigo al triangulumoj, kies ĉiu vertico estas almenaŭ 5-grada, estas rezulto de la verkoj de A. B. Kempe. Dum la lastaj cent jaroj, pluraj aŭtoroj, interalie A. B. Kempe, G. D. Birkhoff, kaj H. Heesch, elvolvis teorion por ataki la problemon. Samtempe, teorio de "neeviteblaj aroj" elvolviĝis, kaj kunfando de tiuj kondukis al la pruvo.

Konfiguracio estas subreto de ebena triangulumo, konsistanta el unu cirkvito (nomita la ringo) kaj ties interno. Konfiguracio estas nomita reduktebla se tio estas demonstrebla, ke ĝi ne povas esti trempita en minimalan kontraŭ-ekzemplon de la kvarkolora konjekto. (Por detaloj, vidu (3) kaj (4)). Aro de konfiguracioj estas nomita neevitebla, se ĉiu ebena triangulumo enhavas iun membron de la aro. De la difinoj, tuj sekvas tio, ke la kvarkolora teoremo estus pruvita, se montriĝus neevitebla aro de redukteblaj konfiguracioj.

La plej efika konata metodo por produkti neeviteblajn arojn estas la metodo de malŝarĝado. Tiu metodo pritraktas la ebenan triangulumon kiel elektran cirkviton, al kies verticoj estas ia indikita ŝarĝo. La formulo de Euler estas uzita por montri, ke la komenca ŝarĝdistribuo, donanta pozitivan ŝarĝon al verticoj 5-gradaj kaj negativan ŝarĝon al verticoj pli-ol-6-gradaj, havas pozitivan ŝarĝosumon. Due, la komenca ŝarĝo estas redistribuita en maniero, kiu obeas la principon de ŝarĝo-konservo. Tio signifas, ke iaj verticoj devas fini kun pozitiva ŝarĝo. Tia algoritmo povas esti sufiĉe kompleksa, ke finia listo de najbaraĵoj de ĉiuj eblaj verticoj eventuale pozitivŝarĝaj povas esti detale traktita. Ĉar ĉiu triangulumo de la ebeno devas enhavi tian najbaraĵon, konfiguracio U tia, ke ĉiu tia najbaraĵo entenas U-eron, estas klare neevitebla en ebenaj triangulumoj.

La principa peno de la laboro koncernis la elvolvadon de la malŝarĝo-procedo. Kvankam la aŭtoroj multe utiligis komputorojn en la studado de malŝarĝalgoritmoj (vidu (2)), la algoritmo uzita estas teknike pli simpla ol pli fruaj klopodoj kaj estis aplikita permane. La metodo efike generas klason de malŝarĝalgoritmoj, kiuj malsamas unu de la aliaj nur en negravaj detaloj. La specifa procedo elektita estis determinita principe por eviti konfiguraciojn de ringogrando pli ol dek-kvar, kaj por uzi konfiguraciojn, kies reduktebleco pruveblus sen troa malŝparo de komputortempo. La algoritmo produktis aron U de malpli ol dumil konfiguracioj, ĉiu de ringogrando maksimume dek-kvar.

Redukteblecon de konfiguracioj per komputoro studis pluraj aŭtoroj, i.a. H. Heesch, S. Gill, kaj F. Allaire kaj E. R. Swart. La redukteblec-kontrolo aplikita en ĉi tiu verko uzis plurajn komputorprogramojn faritajn de John Koch kaj la aŭtoroj. La programoj uzis la algoritmojn de Heesch (kiel priskribitaj en (1) kaj (3)) sed estis konstruitaj por preni avantaĝon de la fleksebleco de la malŝarĝ-procedo. Tial, anstataŭ ol uzi la plej subtilajn konatajn teknikojn pri reduktebleco, ili estis konstruitaj por rapido kaj efiko koncerne la traktadon de tiuj konfiguracioj, kiujn ili povis pruvi redukteblaj. Ĉiu konfiguracio de la neevitebla aro U estis demonstrita esti reduktebla.

La listo de konfiguracioj uzitaj klare ne estas la plej malgranda tia listo, kiu estas farebla. Estas probable, ke per kombino de malgrandaj ŝanĝoj en la malŝarĝalgoritmo, plua detala analizado, kaj plej subtila reduktoprocedo, tiel la nombro da konfiguracioj uzitaj en la pruvo povus esti malaltigita po almenaŭ 25 %. Ne ŝajnas kredeble tamen, ke ĉi tiu teoremo pruveblus per tiuj metodoj tiel, ke oni povus eviti grandiozajn kalkuladojn, kiuj necesigas komputorojn. Tiu lasta konkludo estas subtenata de la verko de E. F. Moore kaj probablokalkuloj de la aŭtoroj, kiuj indikas, ke tia demonstrado ĉiam bezonas konfiguraciojn de ringogrando dek-kvar.

BIBLIOGRAFIO ★

(1) F. Allaire kaj E. R. Swart, A systematic approach to the determination of reducible configurations, J. Combinatorial Theory, Ser. B (aperonta).

(2) K. Appel kaj W. Haken, The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, Illinois J. Math., 20 (1976), p. 218 - 297.

(3) H. Heesch, Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, B. I. Hochschulskripten, 810 / 810 a / 810 b, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969. MR 40 1303.

(4) W. Tutte kaj H. Whitney, Kempe chains and the four color problem, Utilitas Math. 2 (1972), p. 241 - 281. MR 46 8887.

*

Kenneth APPEL and Wolfgang HAKEN

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois 61910 Usono

*

Enkondukan artikolon de William ORR koncerne la teoremon pri kvar koloroj vi trovos ĉe paĝo 70